

# **Zinsmodelle unter dem empirischen Maß zur Risiko- und Renditesteuierung eines Investors**

**Diplomarbeit**

am Institut für Mathematik, Schwerpunkt Stochastik  
Fachbereich Informatik und Mathematik



von

**Edgar Bürger**

Betreuer:

Prof. Dr. Christoph Kühn

18. Dezember 2008



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben.

Meinem Betreuer Prof. Dr. Christoph Kühn danke ich für die freie Gestaltungsmöglichkeit des Themas sowie die ermöglichte Zusammenarbeit mit der Deutschen Bank AG.

Dr. Olaf Scherf danke ich für das interessante Thema der Diplomarbeit, seine unterstützende Beratungstätigkeit und die spannende sowie sehr lehrreiche Praktikumszeit. Ebenso danke ich der Deutschen Bank Financial Engineering Group für das entgegengebrachte Vertrauen bezüglich der Ausführung des Projekts.

Bei Markus Bingmer bedanke ich mich für die Diskussionen in einigen statistischen Problemen.

Julia Kilian danke ich für die moralische Unterstützung während der gesamten Bearbeitungszeit sowie für die publizistische Beratung.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht und mich in dieser Zeit immer unterstützt haben.





# Zusammenfassung

Jeder Investor hat ein Ziel: Er will Gewinne realisieren. Dazu muss er Entscheidungen treffen. Und solche Entscheidungen werden zumeist unterschiedlich getroffen. Was beeinflusst den Investor in seiner Entscheidung und wie lassen sie sich überzeugen? Alle Investoren stellen sich dabei die Frage: Ist das für ein Investment eingegangene Risiko gegenüber der erwarteten Rendite gerechtfertigt? Gibt es eine Möglichkeit, *Ertrag und Risiko* von *zinsbasierten* Finanzinstrument bzw. Portfolien zu analysieren? Ein eben solches Verfahren stellt diese Diplomarbeit vor. Über ein *Zinsstrukturmodell unter dem empirischen Wahrscheinlichkeitsmaß* wird eine P&L Verteilung des entsprechenden Investments berechnet. Welches Zinsmodell eignet sich für diese Berechnung am besten? Eine weit verbreitete Klasse von Zinsstrukturmodellen stellen die Sell-Side Modelle (Pricing Modelle) dar. Diese werden zum arbitragefreien Pricing von Finanzinstrumenten eingesetzt und arbeiten unter einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß. Zur Simulation realer Zinsszenarien müssen diese Modelle unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß aufgestellt und geschätzt werden. Als ein Vertreter dieser Modellklasse wird das Cox-Ingersoll-Ross Modell untersucht. Des Weiteren werden das dynamische Nelson-Siegel Modell sowie ein Resampling-/Bootstrapping Modell (RMJBN Modell) vorgestellt und getestet. Die erwähnten Zinsmodelle werden einem Out-of-Sampling-Test unterzogen. Das gewählte Modell muss einem Kriterienkatalog entsprechen, der anhand der Analyseergebnisse der EURIBOR-Zinskurven bezüglich deren Schwankungen und Formen aufgestellt wurde. Es zeigt sich, dass das RMJBN Modell die wesentlichen Merkmale gut abbildet. Unter dem Namen *Extended RMJBN Modell* folgt eine Erweiterung des Bootstrapping Modells, welche bei der Modellierung der Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen ansetzt. Abschließend wird eine Anwendungsmöglichkeit des Extended RMJBN Modells vorgestellt. Es werden dabei Renditeverteilungen von zwei unterschiedlichen Festgeldanlagen betrachtet, um eine reale Investmententscheidung treffen zu können.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Problemstellung, Zielsetzung und Aufbau der Arbeit</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Zinsstrukturen</b>	<b>8</b>
2.1	Allgemeine Zinsdefinitionen . . . . .	8
2.2	Bonds . . . . .	12
2.3	Zinsberechnungsmethoden . . . . .	14
2.4	Zinsstrukturkurve . . . . .	17
2.5	Empirische Analyse der Zinsstruktur . . . . .	21
2.5.1	Daten . . . . .	21
2.5.2	Zinsen $y_j^t$ . . . . .	22
2.5.3	Zinsänderungen $\Delta y_j^t$ . . . . .	26
2.6	Zinsderivate . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Reale vs. risikoneutrale Welt am Beispiel des Binomialmodells</b>	<b>37</b>
3.1	Einleitung . . . . .	37
3.2	Allgemeine Annahmen . . . . .	37
3.3	Aktienkursverlauf . . . . .	38
3.4	Aktienoptionen . . . . .	40
3.4.1	Reale Welt . . . . .	40
3.4.2	Risikoneutrale Welt . . . . .	43
3.5	Fazit: Reale vs. risikoneutrale Welt . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Zinsmodelle</b>	<b>46</b>
4.1	Pricing Modelle . . . . .	47
4.1.1	Einfaktormodelle . . . . .	50
4.1.2	Mehrfaktormodelle . . . . .	66
4.2	Dynamisches Nelson-Siegel Modell . . . . .	67
4.2.1	Einleitung . . . . .	67
4.2.2	Die Nelson-Siegel Zinsstrukturkurve und ihre Interpretation	69
4.2.3	Schätzung der Modellparameter . . . . .	71
4.2.4	VAR(1) Modellschätzung (Kleinste-Quadrate-Schätzer) . . .	75
4.2.5	Monte Carlo Simulation des VAR(1) Prozesses . . . . .	77
4.2.6	Analyse der simulierten Zinskurven . . . . .	78
4.2.7	Zusammenfassung . . . . .	82

---

4.3	RMJBN Modell und das Extended RMJBN Modell . . . . .	82
4.3.1	Bootstrap Verfahren: Ein Beispiel . . . . .	83
4.3.2	Klassisches Bootstrap Verfahren . . . . .	85
4.3.3	Block Bootstrap Verfahren . . . . .	86
4.3.4	RMJBN-Modellansätze . . . . .	89
4.3.5	Extended RMJBN Modell . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Ergebnisse dieser Arbeit: Ein Anwendungsbeispiel</b>	<b>116</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>v</b>
A.1	Stochastische Grundlagen . . . . .	v
A.2	Zinsstrukturen . . . . .	viii
A.3	Reale vs. risikoneutrale Welt am Beispiel des Binomialmodells . . .	x
A.4	CIR Modell . . . . .	xi
A.5	Nelson-Siegel Modell . . . . .	xviii
A.6	RMJBN Modelle . . . . .	xxvi
A.6.1	Modell Version 1 . . . . .	xxvi
A.6.2	Modell Version 2 . . . . .	xxviii
A.6.3	Modell Version 3 . . . . .	xl
A.6.4	Extended RMJBN Modell . . . . .	xlvi

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Schaubild Sportwetten . . . . .	3
1.2	Schema einer P&L Berechnung . . . . .	5
1.3	Beispiel einer P&L Verteilung eines Equityderivate Portfolios (Quelle: Deutsche Bank AG) . . . . .	5
2.1	EURIBOR Zinssätze mit verschiedenen Laufzeiten . . . . .	11
2.2	Replikation einer Forward Rate mittels Zero Bonds . . . . .	15
2.3	Zeitverlauf der kurzfristigen Zinssätze . . . . .	17
2.4	EURIBOR Zinsstruktur von Januar 1999 - Juli 2008 . . . . .	18
2.5	Typische Zinskurven-Szenarien . . . . .	19
2.6	Zahlungsflüsse eines Swaps . . . . .	20
2.7	Cash Flows eines Receiver Swaps . . . . .	21
2.8	Verteilungen der Krümmung für ausgewählte Laufzeiten zwischen 3m und 20y. Die logarithmierten relativen Häufigkeiten werden auf der y-Achse dargestellt . . . . .	25
2.9	Mittelwerte und Standardabweichungen der EURIBOR Zinskrümmungen . . . . .	25
2.10	Mean Reverting Effekt . . . . .	27
2.11	Links: Plot von 50 Beobachtungen zweier Variablen; Rechts: Plot der 50 Beobachtungen transformiert in die Hauptkomponenten . . .	32
3.1	Aktienkursverlauf mit Verteilungen in der realen und risikoneutralen Welt . . . . .	39
4.1	Pricing-Modelle: Allgemeines Schema am Bsp. des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses . . . . .	58
4.2	CIR-1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen . . . . .	63
4.3	CIR-1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen	63
4.4	CIR-1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen	64
4.5	CIR-1: Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	64
4.6	CIR-1: Simulierte Zinskurven. . . . .	65
4.7	Schema der Nelson-Siegel Zinskurvensimulation . . . . .	68
4.8	Nelson-Siegel Faktorladungen . . . . .	70

4.9	oben links: Mittelwert der Nelson-Siegel Zinskurven vs. mittlere EURIBOR Zinskurve. Dabei variiert $\lambda_t$ über die Zeit hinweg. Oben rechts: Nelson-Siegel Zinskurve mit den Mittelwerten der geschätzten Faktoren $\langle \hat{L} \rangle, \langle \hat{S} \rangle, \langle \hat{K} \rangle, \langle \hat{\lambda} \rangle = \lambda_{fix}$ vs. mittlere EURIBOR Zinskurve. Unten: Der RMSE der beiden obigen Nelson-Siegel Zinskurven. . . . .	72
4.10	Gefittete Nelson-Siegel Zinskurven mit den dazugehörigen EURIBOR Zinskurven . . . . .	73
4.11	Nelson-Siegel Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen . . . . .	78
4.12	Nelson-Siegel Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen . . . . .	78
4.13	Nelson Siegel Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen. . . . .	79
4.14	Nelson-Siegel Modell: Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	80
4.15	Nelson-Siegel Modell: Simulierte Zinskurven . . . . .	81
4.16	Schema-Diagramm des Bootstrap Verfahrens . . . . .	85
4.17	Schema-Diagramm des Block Bootstrap-Verfahrens . . . . .	86
4.18	Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung mit $p = 5\%$ . . . .	87
4.19	Schema-Diagramm der RMJBN-Modellansätze . . . . .	89
4.20	RMJBN Modell Version 1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung . . . . .	91
4.21	RMJBN Modell Version 1: Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	91
4.22	RMJBN Modell Version 1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen . . . . .	92
4.23	RMJBN Modell Version 1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen . . . . .	93
4.24	RMJBN Modell Version 1: Simulierte Zinskurven . . . . .	94
4.25	RMJBN Modell Version 2 [Geo(p), $p = 5\%$ ]: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung . . . . .	96
4.26	RMJBN Modell Version 2 [Geo(p), $p = 5\%$ ]: Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	97
4.27	RMJBN Modell Version 2 [Geo(p), $p = 11\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen . . . . .	98
4.28	RMJBN Modell Version 2: Simulierte Zinskurven . . . . .	99
4.29	Scatterplot der Zinslevel mit den Tageszinsänderungen für 1d und 30y. . . . .	101

4.30	Fehlerfunktion der Standardabweichung in Abhängigkeit der Konstanten $f$ am Beispiel des 1m Zins . . . . .	102
4.31	Links: Schematische Darstellung der Fehlerfunktion. Rechts: Schematische Darstellung des Standardabweichungsverlaufs über $j$ . . .	103
4.32	RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung <b>mit Mean Reverting Term</b> und Startzinsen vom 4.7.2008 . . . . .	104
4.33	RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung <b>ohne Mean Reverting Term</b> und Startzinsen vom 4.7.2008 . . . . .	105
4.34	RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung <b>mit Mean Reverting Term</b> und Startzinsen vom 2.12.2005 . . . . .	105
4.35	RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung <b>ohne Mean Reverting Term</b> und Startzinsen vom 2.12.2005 . . . . .	106
4.36	RMJBN Modell Version 3: Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	106
4.37	RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen . . . . .	107
4.38	RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen . . . . .	107
4.39	RMJBN Modell Version 3: Links: plausibel erscheinende Zinskurven. Rechts: weniger plausibel erscheinende Zinskurven . . . . .	108
4.40	Schema-Diagramm des Extended RMJBN Modells . . . . .	109
4.41	Fehlerfunktion der Mittelwerte in Abhängigkeit der Konstanten $u$ am Beispiel des 1m Zins . . . . .	110
4.42	Extended RMJBN Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung . . . . .	112
4.43	Extended RMJBN Modell: Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	112
4.44	Extended RMJBN Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen . . . . .	113
4.45	Extended RMJBN Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen . . . . .	113
4.46	Extended RMJBN Modell: Simulierte Zinskurven . . . . .	114
5.1	Links: Renditeverteilung nach 12 Monaten bei Rollen von drei Monatsgeld; Rechts: Renditeverteilung nach 12 Monaten bei Investition in Schuldscheindarlehen mit Kündigungsrecht (6m, 8m, 10m). . . .	118

A.1	Oben: Varianzen der nichtüberlappenden q-Tagesänderungen; Unten: Lag-1 Autokorrelationen der nichtüberlappenden q-Tagesänderungen	viii
A.2	Eigenwerte und Eigenvektoren (Faktoren) der EURIBOR Zinssätze von Januar 1999 bis Juli 2008 für die gesamte Zinskurve sowie getrennt für den Geld- und Swapmarkt . . . . .	ix
A.3	Callpreisbewertungen im Binomialmodell . . . . .	x
A.4	Pfadverläufe der Shortrate und die dazugehörigen Verteilungen unter P und Q . . . . .	xv
A.5	CIR Modell: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . .	xvi
A.6	CIR Modell: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen	xvii
A.7	Nelson-Siegel Faktoren vs. empirische Faktoren und die dazugehörigen Autokorrelationsfunktionen . . . . .	xxii
A.8	Autokorrelationsfunktionen der Residuen $\hat{\Sigma}$ . Die roten Linien stehen für die Standardfehlerbänder $\pm \frac{1.96}{\sqrt{T}}$ . Solange sich die Autokorrelation zwischen diesen Bändern befindet, ist sie auf einem Signifikanzniveau von 5% nicht von Null verschieden . . . . .	xxiii
A.9	Nelson-Siegel Modell: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen	xxiv
A.10	Nelson-Siegel Modell: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxv
A.11	RMJBN Modell Version 1: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen	xxvi
A.12	RMJBN Modell Version 1: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxvii
A.13	RMJBN Modell Version 2 [ $b = 40, p = 5\%$ ]: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxviii
A.14	RMJBN Modell Version 2 [ $\text{Geo}(p), p = 5, 7\%$ ]: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxix
A.15	RMJBN Modell Version 2 [ $b = 40, p = 5\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxx
A.16	RMJBN Modell Version 2 [ $\text{Geo}(p), p = 5, 7\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxi
A.17	RMJBN Modell Version 2 [ $b = 60, p = 10\%$ ]: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxii
A.18	RMJBN Modell Version 2 [ $\text{Geo}(p), p = 10\%$ ]: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxiii
A.19	RMJBN Modell Version 2 [ $b = 60, p = 10\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxiv



A.20 RMJBN Modell Version 2 [Geo(p), $p = 10\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxv
A.21 RMJBN Modell Version 2 [Geo(p), $p = 5\%$ ]: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxvi
A.22 RMJBN Modell Version 2 [Geo(p), $p = 5\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxvii
A.23 RMJBN Modell Version 2 [Geo(p), $p = 2\%$ ]: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxviii
A.24 RMJBN Modell Version 2 [Geo(p), $p = 2\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xxxix
A.25 RMJBN Modell Version 3: Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen 1m-5y. Die logarithmierten relativen Häufigkeiten werden auf der y-Achse dargestellt . . . . .	xl
A.26 RMJBN Modell Version 3: Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen 6y-20y . . . . .	xli
A.27 RMJBN Modell Version 3: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen	xlii
A.28 RMJBN Modell Version 3: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xliii
A.29 RMJBN Modell Version 3: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen mit konstanter Blocklänge=1 . . . . .	xliv
A.30 Extended RMJBN Modell: Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen 1m-5y . . . . .	xl v
A.31 Extended RMJBN Modell: Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen 6y-20y . . . . .	xlvi
A.32 Extended RMJBN Modell ( $p=5\%$ ): Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xl vii
A.33 Extended RMJBN Modell ( $p=5\%$ ): Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xl viii
A.34 Extended RMJBN Modell ( $p=20\%$ ): Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	xl ix
A.35 Extended RMJBN Modell ( $p=20\%$ ): Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen . . . . .	l
A.36 Zinskurven: Extended RMJBN Modell (grün) vs. Modell Version 3 (blau) . . . . .	li
A.37 Zinsflächen: Modell Version 3 . . . . .	lii
A.38 Zinsflächen: Extended RMJBN Modell . . . . .	liii

# Tabellenverzeichnis

2.1	Statistiken der Zinsen für ausgewählte Laufzeiten . . . . .	22
2.2	Korrelationsmatrix der EURIBOR Zinsen . . . . .	22
2.3	Auswertung der lokalen Extrema über alle vorhandenen Zinssätze .	23
2.4	Deskriptive Statistik der Krümmungen . . . . .	24
2.5	Statistiken der Zinsänderungen für ausgewählte Laufzeiten . . . . .	26
2.6	Korrelationsmatrix der Zinsänderungen . . . . .	26
2.7	Varianz-Ratio-Statistiken VR(q) für die Periode Januar 1999 bis Juli 2008 . . . . .	30
4.1	CIR-Parameter . . . . .	61
4.2	Deskriptive Statistiken der geschätzten Faktoren . . . . .	73
4.3	Korrelationstabelle der Faktoren . . . . .	73
4.4	Ergebnisse der Aspirinstudie . . . . .	83
4.5	Optimale mittlere Blocklängen für die EURIBOR Tageszinsände- rungen . . . . .	88
4.6	Übersicht der einzelnen Modellversionen mit ihren Eigenschaften . .	90
4.7	Berechnungen der Eintrittswahrscheinlichkeiten (neue Sprungwahr- scheinlichkeit) $p$ der geometrischen Verteilung . . . . .	96
4.8	Mean Reverting Speed und Level . . . . .	102
4.9	Federkonstanten $f_j$ . . . . .	104
4.10	Feder- $f_j$ und Mittelwertkonstanten $u_j$ . . . . .	111
4.11	Übersicht der einzelnen Modellversionen mit ihren Eigenschaften . .	111

# 1 Problemstellung, Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Das Ziel jeden Investors ist es, Gewinne zu realisieren. Dazu muss er meist unterschiedliche Entscheidungen treffen. Was beeinflusst diese Entscheidungen und wie lassen sich Investoren überzeugen? An dieser Stelle ist es vor allem wichtig, das für ein Investment eingegangene Risiko gegenüber der erwarteten Rendite zu analysieren. Diese Problemstellung wurde während eines Praktikums bei der Deutschen Bank im Bereich des Private Wealth Managements herausgearbeitet<sup>1</sup>. Das Ziel war die Entwicklung eines Zinsmodells unter der empirischen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Mit dieser soll es möglich sein, Gewinn/Verlust (P&L) Verteilungen von zinsbasierten Finanzinstrumenten sowie Zinsportfolien zu berechnen. Entscheidend dabei ist der Zeithorizont von drei bis zwölf Monaten in der Zukunft, für den das Risikoexposure berechnet werden soll. Unter Risiko versteht man den möglichen Verlust, der sich aus der Unsicherheit über die zukünftige Entwicklung von Risikofaktoren<sup>2</sup> ergibt und zur Folge hat, dass eine Zielgröße von einem Referenzwert negativ abweicht.

Angenommen man betrachtet zum jetzigen Zeitpunkt ein Portfolio mit verschiedenen Trading-Positionen. Jede dieser Positionen verändert ihren Wert in Abhängigkeit von einem oder mehreren Risikofaktoren. Ein Händler möchte nun wissen, wie groß die Verlustobergrenze über einen bestimmten Zeitraum<sup>3</sup> seines Portfolios in z.B. 5% aller Fälle ist. Hierfür müssen alle hypothetischen Änderungsszenarien der Risikofaktoren aufgeschrieben werden: Beispielsweise wenn der DAX um 3% steigt, die Zinsen um 0,6% fallen und der Dollar um 1% ansteigt. Somit wird eine gemeinsame Verteilungsfunktion der Risikofaktoren beschrieben. Jetzt kann man berechnen, in wie vielen Fällen das Portfolio z.B. einen Verlust von -50.000 Euro aufweist. Somit erhält man eine P&L Verteilung für dieses Portfolio und aus der Vielzahl von möglichen Änderungen der Risikofaktoren ist eine einfach zu interpretierende Verteilungsfunktion entstanden. Der anfangs erwähnte Händler kann nun aus dieser P&L Verteilung ablesen, wie hoch die Verlustobergrenze seines Portfolios in  $(100 - X)\%$  aller Fälle für z.B.  $X = 95\%$  beträgt. Man spricht hier von einem **Value at Risk** (VaR) auf einem Konfidenzniveau von  $X = 95\%$ . Das be-

---

<sup>1</sup>November 2007 bis Mai 2008

<sup>2</sup>z.B. Zinsstrukturkurven, Aktienkurse, Währungskurse, Volatilitäten etc.

<sup>3</sup>Ein Tag bis zwei Wochen. Häufig wird eine Liquidationsperiode von 10 Tagen gefordert.

deutet, dass der Händler damit rechnen muss, in 5% aller Fälle einen Verlust von beispielsweise mehr als 50.000 Euro zu erzielen. Die gemeinsame Verteilungsfunktion der Risikofaktoren wird hier nicht näher spezifiziert. In den meisten Fällen geht man von einem parametrischen Modell unter der Annahme der Normalverteilung aus. Diese Verteilungsannahmen stimmen jedoch in der Realität häufig nicht. Dies führt zu fehleranfälligen VaR-Anwendungen. Des Weiteren sagt der VaR nichts über den Einfluss des Fat Tails der P&L Verteilung aus. Verschiedene P&L Verteilungen können denselben VaR besitzen und man kann somit die extremen Ereignisse der einzelnen Verteilungen nicht einschätzen. Das Risikoexposure von Investmentportfolien<sup>4</sup> hingegen muss über einen langen Zeitraum (drei bis zwölf Monate) gemessen werden und dabei spielen realistische P&L Verteilungen eine wichtige Rolle. Dazu benötigt man Modelle, die die Verteilungsfunktionen der Risikofaktoren über den besagten Zeitraum adäquat abbilden. In dieser Arbeit wird nach einem geeigneten Zinskurvenmodell gesucht, welches diese Aufgabe möglichst gut erfüllt.

Zu diesem Zweck ist es erstmal wichtig, sich die unterschiedlichen Zielsetzungen und damit verbundenen Bewertungen von Finanzinstrumenten zwischen dem **Käufer (Investor)** und dem **Verkäufer (Investmentbank)** zu verdeutlichen. Anhand der Renditeerwartung, des Risikos und des Preises des Investments soll der Unterschied im Folgenden kurz erläutert werden.

## KÄUFERSICHT

Jedes Investment ist durch eine gewisse Renditeerwartung motiviert. Für den Investor ist es von entscheidender Bedeutung, mit welcher Wahrscheinlichkeit/Chance er welche Rendite auf mittel- bis langfristige Sicht erzielt. Das Risiko, das er dabei trägt, ist die Unsicherheit, eine gewünschte Rendite zu erwirtschaften. Je höher die erwartete Rendite ausfallen soll, desto größer ist dabei das Risiko<sup>5</sup>. Im Private Wealth Management versucht man deshalb, Zielrenditen festzulegen und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten zu optimieren<sup>6</sup>. Zur Beurteilung des Werts eines Investments muss die *reale Underlying-Verteilung* der zukünftigen Zahlungen bestmöglich geschätzt werden. Neben Investitionszwecken werden Derivate auch zwecks Hedgingaufgaben zur Risikovernichtung gekauft.

<sup>4</sup>ebenso Kreditrisiken und Risiken im Asset/Liability Management.

<sup>5</sup>Da Investoren in der Regel risikoavers handeln, wird das Eingehen von Risiken mittels Risikoprämien motiviert.

<sup>6</sup>z.B. Zielrenditen von 5% bis 6% pro Jahr (kurz: p.a.) werden langfristig anvisiert.

## VERKÄUFERSICHT

Investmentbanken hingegen haben ganz andere Renditeerwartungen. Sie wollen einen sofortigen Ertrag durch den Verkauf der Produkte generieren. Dieser Ertrag ist in den meisten Fällen an die Produktkonstruktion geknüpft. Das Marktrisiko wird schnellstmöglich neutralisiert. Großbanken hedgen größtenteils selbst ihre Positionen, wohingegen kleinere Unternehmen die Risikopositionen am Markt weiter verkaufen. Der Preis ist also zusammengesetzt aus aktuellen Hedgingkosten (Marktpreis) plus Strukturierungskosten (Margen etc.). Zur Preisfindung werden speziell dafür entwickelte mathematische Modelle verwendet, die unter einem sogenannten risikoneutralen Maß  $Q$  arbeiten. D.h, es wird eine *künstliche (risikoneutrale) Underlying-Verteilung* hergeleitet, mit deren Hilfe man ganz einfach Derivatepreise berechnen kann. Unter dieser Verteilung<sup>7</sup> folgt der heutige Preis eines Finanzinstruments aus dem risikolos abgezinsten Erwartungswert seines zukünftigen Preises.

Die Buy-Side hat in den letzten Jahren stark an Bedeutung gewonnen. Es werden immer mehr Finanzinstrumente von institutionellen Investoren<sup>8</sup> gekauft. Das dadurch in deren Portfolien entstehende Risikoexposure sollte demnach auch bewertet werden. Um eine vernünftige Bewertung zu gewährleisten, müssen Modelle entwickelt werden, die langfristige Entwicklungen des benötigten Underlyings unter der realen Verteilung modellieren.

## REALE WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG $P$ VS. RISIKONEUTRALE WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG $Q$ AM BEISPIEL VON SPORTWETTEN

Wer gewinnt?	
 <div>Stuttgart</div> <div>2,50</div>	<div>München</div> <div>1,66</div> 
Wetteinnahmen: 20.000€ $20.000€ \cdot \text{Quote}_S = 50.000€$ $\Downarrow$ $\text{Quote}_S = 2,50$	Wetteinnahmen: 30.000€ $30.000€ \cdot \text{Quote}_M = 50.000€$ $\Downarrow$ $\text{Quote}_M = 1,66$
Aus den Quoten abgeleitete <b>risikoneutrale</b> Wahrscheinlichkeiten: Stuttgart: $1:2,50 = 40\%$ München: $1:1,66 = 60\%$	

**Abbildung 1.1:** Schaubild Sportwetten

<sup>7</sup>Im Laufe der Arbeit wird die reale Underlying-Verteilung mit  $P$  und die risikoneutrale Underlying-Verteilung mit  $Q$  gekennzeichnet.

<sup>8</sup>etwa von Private Wealth Managern, Hedgefonds, Versicherern etc.

Um den Unterschied zwischen der realen Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  und der risikoneutralen Verteilung  $Q$  zu veranschaulichen, wird ein einfaches Wettbeispiel dargestellt. In Abbildung 1.1 werden die Wettquoten aus Sicht des Buchmachers für das Fußballspiel zwischen Stuttgart und München berechnet. Die Gesamteinnahmen betragen 50.000 Euro wobei 20.000 Euro auf Stuttgart und 30.000 Euro auf München fallen. Der Buchmacher stellt nun risikoneutrale Gewinnquoten, d.h. er ist dadurch absolut risikofrei und der tatsächliche Spielausgang ist für ihn irrelevant. Er zahlt am Ende nur die tatsächlichen Einnahmen wieder aus. Die risikoneutralen Gewinnwahrscheinlichkeiten werden also aus den Quoten (Marktpreisen) abgeleitet. Ein Fußballfan überlegt, ob er auf Stuttgart oder München setzen soll. In seiner Entscheidungsfindung bezieht er den aktuellen Tabellenstand, den Heimvorteil, die verletzten Spieler einer Mannschaft etc. mit ein und ermittelt damit die (subjektiven) realen Gewinnwahrscheinlichkeiten. Er kommt zu dem Schluss, dass Stuttgart eine 50%ige Gewinnchance besitzt. Das „Investment“ erscheint attraktiv, da die in der Wettquote (Marktpreis) implizierte Gewinnwahrscheinlichkeit bei nur 40% liegt. Dieses Wettbeispiel stellt einen stark vereinfachten Finanzmarkt bestehend aus zwei Wertpapieren  $w_1$  und  $w_2$ , die jeweils eine Geldeinheit kosten, dar. Wertpapier  $w_1$  liefert mit einer Wahrscheinlichkeit von  $q = \frac{2}{5}$  eine Auszahlung von  $\frac{5}{2}$  Geldeinheiten und Wertpapier  $w_2$  mit der selben Wahrscheinlichkeit eine Auszahlung von null. Umgekehrt liefert  $w_2$  eine Auszahlung von  $\frac{5}{3}$  Geldeinheiten und  $w_1$  eine Auszahlung von null Geldeinheiten mit der selben Wahrscheinlichkeit von  $1 - q = \frac{3}{5}$ . Bei der Punktverteilung  $Q = \{q, 1 - q\}$  handelt es sich um eine risikoneutrale Verteilung.

Zusammenfassend ist zu beachten, dass die *risikoneutrale Welt aus Marktpreisen* generiert wird. Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten können von den tatsächlichen (realen) Wahrscheinlichkeiten stark abweichen. Man stelle sich nur einen vermögenden Münchenfan vor, der eine sehr hohe Summe auf den Sieg seines Vereins setzt und somit die Wettquoten stark verzerrt. Der aus den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten abgeleitete Preis eines Finanzinstruments berücksichtigt die Kosten, um sich als Verkäufer risikofrei zu stellen („Hedgen“). Die Erwartungswerte der Auszahlungen beider Wertpapiere entsprechen also ihren Einsätzen. Es handelt sich hierbei um ein faires Spiel. Der Auszahlungsprozess ist demnach ein Martingal und das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  wird deshalb auch häufig Martingalmaß genannt. Für Investmentbanken ist neben dem Preis an sich noch dessen Reaktion auf Änderungen von Marktparametern (Sensitivitäten) wichtig. Für Investoren hingegen sind die realen Wahrscheinlichkeiten relevant, um so eine Abwägung zwischen *Ertrag und Risiko* zu treffen. Je nachdem wie es die Aufgabenstellung er-

fordert, muss zwischen der realen und der risikoneutralen Verteilung unterschieden werden.

In Kapitel 3 wird nochmal der Unterschied zwischen den beiden Verteilungen in der Finanzmathematik am Beispiel eines Aktien-Binomialmodells erläutert. Es wird außerdem gezeigt, dass man auch mit der realen Wahrscheinlichkeitsverteilung den Marktpreis bestimmen kann.

#### ANWENDUNG DER REALEN WAHRSCHEINLICHKEITEN: P&L BERECHNUNG

Das Bewerten eines Finanzinstruments erfolgt üblicherweise unter einer risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsverteilung  $Q$ . Aus Sicht des Risikomanagements ist es notwendig, die Underlying-Verteilung (Pfade) unter  $P$  zu berechnen.

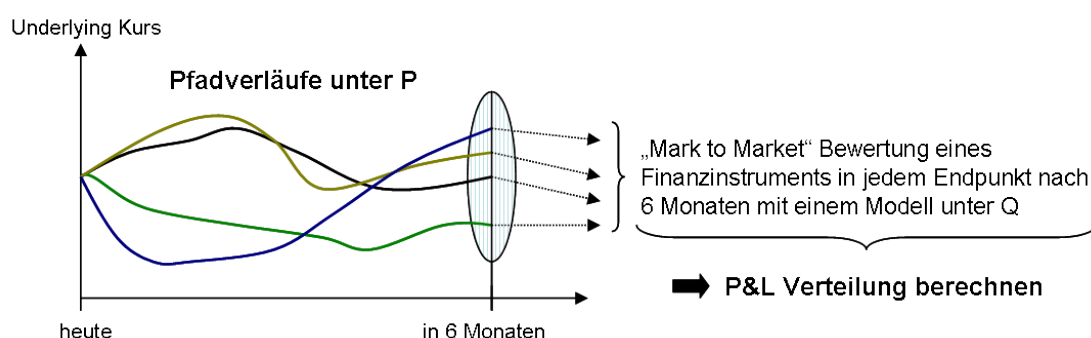


Abbildung 1.2: Schema einer P&L Berechnung

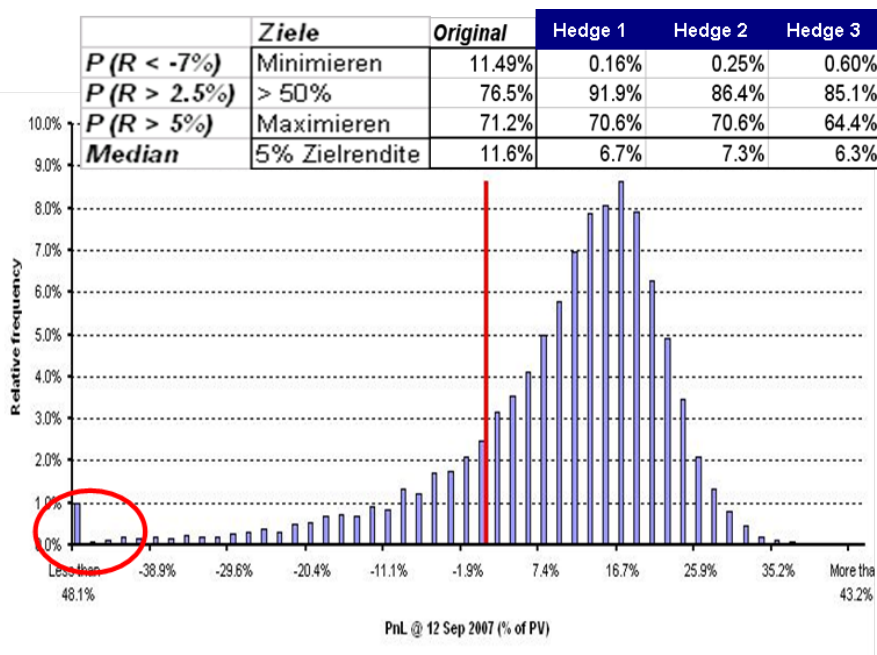


Abbildung 1.3: Beispiel einer P&L Verteilung eines Equityderivate Portfolios (Quelle: Deutsche Bank AG)

Abbildung 1.2 zeigt ein vereinfachtes Schema einer P&L Berechnung. Bis zum Bewertungszeitpunkt in beispielsweise 6 Monaten müssen die Pfade des Underlyings unter der realen Verteilung simuliert werden<sup>9</sup>. Zum Zeitpunkt der Bewertung werden die Preise des Finanzinstruments (z.B. Call Optionen) dann mit einem Bewertungsmodell unter einem risikoneutralen Maß  $Q$  bestimmt. Eine geeignete Methode für Standardoptionen ist beispielsweise das Longstaff-Schwartz Verfahren<sup>10</sup>. In Abbildung 1.3 ist eine P&L Verteilung eines Equity Derivateportfolios vom 12.9.2007 der Deutschen Bank abgebildet. Es handelt sich hier um ein Portfolio mit einer häufig eingesetzten asymmetrischen Strategie<sup>11</sup>. D.h., es wird nur so viel Risiko aufgebaut, wie der Investor bereit ist zu tragen. Das in Abbildung 1.3 dargestellte Portfolio besitzt zwar im Originalzustand eine erwartete Rendite von 11,6% jedoch mit einem ausgeprägten Fat Tail (roter Kreis). Die Wahrscheinlichkeit eine negative Rendite von unter  $-7\%$  zu erzielen, liegt bei etwa 11,5% und ist für die Kunden des Private Wealth Managements zu hoch. Hier wird, wie schon erwähnt, eine Zielrendite von ca.  $5\% - 6\%$  p.a. vorgegeben. Mit Hilfe der drei möglichen Hedgingstrukturen kann dieser Fat Tail radikal abgebaut werden. Mit Hedge 1 ist es beispielsweise möglich, die Wahrscheinlichkeit einer negativen Rendite von unter  $-7\%$  von 11,6% auf 0,16% zu senken. Dabei fällt der Erwartungswert auf 6,7% ab und liegt noch im Vorgabenbereich. Heute, ein Jahr nach dieser Analyse, ist das Portfolio trotz starker Verluste an den Börsen nicht eingebrochen. Somit hat sich die Strategie des P&L Engineerings bewährt. Die Vorteile der P&L Verteilung sind zusammenfassend die explizite Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeiten zukünftiger Marktszenarien, die Darstellung auch großer Gewinne und Verluste (Fat Tails) sowie die Bündelung aller wesentlichen Informationen auf einen Blick zur Ertrag- und Risikosteuerung.

Die Simulation einzelner Pfade von Equities stellt z.B. mit der geometrisch Brownschen Bewegung kein größeres Problem dar. Ein Wechsel zwischen der  $P$  und  $Q$  Verteilung wird einfach über das Austauschen des Drifts erreicht. Möchte man auch Zinsportfolien analysieren, muss man hingegen die gesamte Zinsstruktur modellieren, da die einzelnen Zinsen miteinander hoch korreliert sind. Des Weiteren treten Mean Reverting und Autokorrelationseffekte auf.

<sup>9</sup>Das Ziel dieser Diplomarbeit besteht darin, ein geeignetes Zinsmodell zu finden, welches reale Zinsszenarien erzeugt.

<sup>10</sup>Hierbei wird der Erwartungswert unter  $Q$  über ein Polynom approximiert und die Parameter werden mittels Regression unter  $Q$  kalibriert. Die unter  $P$  simulierten Endwerte können nun in die Polynomfunktion eingesetzt werden und man erhält die P&L Verteilung unter  $P$ . Vgl. [Gla04] S.459 ff.

<sup>11</sup>wird z.B. bei Hedgefonds angewandt.



## AUFBAU DER DIPLOMARBEIT

Das **zweite Kapitel** startet mit der Einführung von wichtigen Zinsdefinitionen und Zinsprodukten. Es folgt eine Analyse der empirischen EURIBOR Zinsstruktur. Es wird ein Kriterienkatalog erstellt, mit dessen Hilfe die Outputs der betrachteten Zinsmodelle untersucht werden. Das **dritte Kapitel** befasst sich mit der Unterscheidung zwischen der realen und der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Finanzmathematik. Um die wesentlichen Zusammenhänge zu erklären, wird als einfaches Beispiel ein einperiodisches Aktienbinomialmodell vorgestellt. Im **vierten Kapitel** werden drei mögliche Zinsmodelle unter der empirischen Verteilung präsentiert und anhand des Kriterienkatalogs einem Out-Of-Sample Test unterzogen. Das betrachtete Resampling Modell wird durch eine Modifikation zum *Extended RMJBN Modell* erweitert. Im **fünften Kapitel** werden abschließend die Renditeverteilungen zweier Festgeldanlagen betrachtet, um eine Investitionsentscheidung zwischen den beiden Anlagemöglichkeiten zu treffen.

## 2 Zinsstrukturen

In diesem Kapitel werden die Basisinstrumente und Definitionen des Zinsmarktes eingeführt. Nach der allgemeinen Definition von Zinssätzen und Anleihen wird auf deren Zusammenhänge eingegangen. Darauf aufbauend wird die Zinsstrukturkurve mit ihren grundlegenden Eigenschaften beschrieben. Die typischen Eigenschaften der Zinssätze bzw. der Zinsstrukturkurven, die ein empirisches Zinsmodell abbilden sollte, werden im Anschluss näher untersucht.

### 2.1 Allgemeine Zinsdefinitionen

Nimmt ein Marktteilnehmer bei einem anderen einen Kredit mit einer Laufzeit von z.B. drei Monaten, einem Jahr oder drei Jahren auf, so wird dieser Geldbetrag mit dem der Laufzeit entsprechenden Marktzinssatz verzinst. Marktteilnehmer sind in der Regel institutionelle Anleger, d.h. Banken, Fondsgesellschaften, Versicherungen sowie andere große Unternehmen. Der **Marktzins** ist der für die jeweilige **Laufzeit**, **Währung** und **Bonität** erhaltene bzw. gezahlte Zinssatz auf den **Geld-** und **Kapitalmärkten**.

**Definition 2.1.1** (Zinssatz). Der **Zinssatz**  $i$  (auch: Zinsrate, Zins) ist der in Prozent ausgedrückte (jährliche) Preis für geliehenes Kapital.

Die Wertentwicklung zum Zeitpunkt  $t$  einer Anlage  $A_0$  ist gegeben durch

$$A_t = A_0 q,$$

wobei  $q$  den sogenannten Zinsfaktor bezeichnet.

**Definition 2.1.2** (Zinsfaktor). Als den **Zinsfaktor**  $q$  bezeichnet man die Größe

$$q := 1 + i.$$

Es wird unterschieden zwischen den **L=einfachen**, **Y=jährlichen**,  $Y_k$ =**unterjährigen** und **R=stetigen** Zinssätzen. Die dazugehörigen Zinsfaktoren sind definiert durch

1. (einfache Zinsfaktor):  $q_L = (1 + Lt)$ , wobei  $t$  die Laufzeit bezeichnet.
2. (jährliche Zinsfaktor):  $q_Y = (1 + Y)^t$  (Zinseszinsrechnung).

3. (unterjährig Zinsfaktor):  $q_{Y_k} = (1 + \frac{Y_k}{k})^k$ . Bei unterjährig verzinslichen Anlagen erfolgen die Zinszahlungen mehrmals im Jahr.  $k$  gibt die Anzahl der Zinszahlungen pro Jahr an.  $Y_k$  ist der nominelle Zinssatz (Jahreszinssatz) und  $\frac{Y_k}{k}$  der reale Zinssatz.
4. (stetige Zinsfaktor): Die stetige Verzinsung ist ein Sonderfall der unterjährig Verzinsung. Hierbei strebt die Anzahl der Zinszahlungen  $k$  gegen unendlich. Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Y_k}{k}\right)^k = e^{Y_k}.$$

Und damit folgt für den stetigen Zinsfaktor  $q_R = e^{Rt}$ .

**Beispiel 2.1.1.** Das Anfangskapital sei gegeben durch  $A_0 = 1000$  Euro. Die Zinssätze  $L$ ,  $Y$ ,  $Y_k$  und  $R$  betragen 10% p.a. und die Laufzeit  $t$  beträgt zwei Jahre. Bei der unterjährig Verzinsung erfolgt die Zinsgutschrift monatlich ( $k = 12$ ). Wie hoch ist das jeweilige Endkapital  $A_2$ ?

1.  $A_2 = A_0 \times q_L = 1000 \times (1 + 0,1 \times 2) = 1200$  Euro
2.  $A_2 = A_0 \times q_Y = 1000 \times (1 + 0,1)^2 = 1210$  Euro
3.  $A_2 = A_0 \times q_{Y_k} = 1000 \times (1 + \frac{0,1}{12})^{2 \times 12} = 1220,4$  Euro
4.  $A_2 = A_0 \times q_R = 1000 \times e^{0,1 \times 2} = 1221,4$  Euro

Oftmals ist es notwendig, den heutigen Wert von zukünftigen Geldbeträgen zu bewerten. Dies wird erreicht, indem man die Geldbeträge abzinst (diskontiert). Beispielsweise ist ein Geldbetrag von  $A_2 = 1210$  EURO, der in zwei Jahren ausgezahlt wird, bei einem jährlichen Zinssatz  $Y = 10\%$  p.a. heute  $A_0 = 1210 \times (1 + 0,1)^{-2} = 1000$  Euro wert.

**Definition 2.1.3** (Barwert). Seien  $z_0, \dots, z_T$  zukünftige Zahlungen. Der Barwert (auch: present value) dieser Zahlungsreihe ist definiert durch

$$A_0 = z_0 q^{-0} + z_1 q^{-1} + \dots + z_T q^{-T}.$$

Die bislang betrachteten Zinssätze bezeichnet man als **Spot Rates**. Die Spot Rates haben die Eigenschaft, dass die Verzinsungsperiode sofort beginnt. Eine weitere Klasse von Zinssätzen sind die **Forward Rates**. Dabei handelt es sich um Zinsen, deren Laufzeit nicht unmittelbar (wie bei den Spot Rates), sondern erst ab einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft beginnen. Forward Rates lassen sich aus den Spot Rates zu verschiedenen Laufzeiten eindeutig bestimmen. Zur

Veranschaulichung betrachtet man zwei Anleger, die ihr Geld beide für zehn Jahre anlegen wollen. Der erste Anleger möchte sein Geld zu einem bestimmten Zinssatz heute schon für den gesamten Zeitraum fest anlegen. Der andere Anleger plant hingegen, sein Geld erst für vier Jahre fest anzulegen. Für die ausstehenden sechs Jahre möchte er bereits heute mit der Bank eine Forward Rate vereinbaren, zu welcher er das Geld nach vier Jahren anlegen kann. Aus Gründen der sogenannten **Arbitragefreiheit**<sup>1</sup> müssen beide Anleger für die Gesamtlaufzeit den selben Zinsertrag erhalten.

**Beispiel 2.1.2.** *Angenommen Anleger A bekommt einen Zinssatz von  $Y = 6\%$  p.a. über eine Laufzeit von zehn Jahren. Anleger B legt sein Kapital zuerst für vier Jahre an und bekommt dafür einen Zinssatz von  $Y = 4\%$  p.a.. Für die ausstehenden sechs Jahre wird bereits heute eine Forward Rate vereinbart. Aus Gründen der Arbitragefreiheit muss die Forward Rate so gewählt werden, dass man über die Gesamtanlagezeit von zehn Jahren ebenfalls auf eine Rendite von  $Y = 6\%$  p.a. kommt. Auflösen der Gleichung  $(1 + 0,06)^{10} = (1 + 0,04)^4(1 + F_Y)^6$  nach  $F_Y$  ergibt eine Forward Rate von  $F_Y = 7,26\%$  p.a.. Angenommen, die Forward Rate würde so gewählt werden, dass lediglich eine Rendite von  $Y = 5\%$  p.a. erzielt wird, dann wäre es möglich einen sofortigen risikolosen Gewinn ohne Kapitaleinsatz zu erlangen, indem man sich Geld für  $Y = 5\%$  p.a. leiht und dieses über zehn Jahre für  $Y = 6\%$  p.a. anlegt.*

Im Zusammenhang mit Zinsgeschäften fällt häufig der Begriff der **Bonität**, den man folgendermaßen definiert.

**Definition 2.1.4** (Bonität). *Unter „Bonität“ versteht man die Kreditwürdigkeit eines Marktteilnehmers, welche über sogenannte Ratings gekennzeichnet wird. In der Regel werden Ratings durch Buchstabenkombinationen gekennzeichnet von AAA bzw. Aaa (beste Qualität) bis D (zahlungsunfähig).*

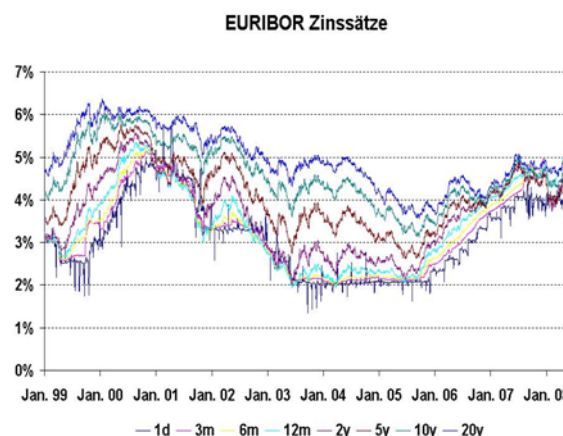
**Beispiel 2.1.3.** *Im Folgenden werden zwei Unternehmen A und B miteinander verglichen, die sich Geld für neue Investitionen über den Kapitalmarkt leihen wollen. Unternehmen A hat ein sehr gutes AAA-Rating und Unternehmen B ein schlechtes C-Rating. Um Investitionsanreize zu schaffen, muss Unternehmen B im Vergleich zu Unternehmen A einem Investor eine sogenannte **Risikoprämie** in Form eines höheren Zinssatzes auf das investierte Kapital zahlen. Die Differenz zwischen den beiden Zinssätzen nennt man **Zins-Spread**.*

<sup>1</sup>Auf einem arbitragefreien Markt ist es nicht möglich, bei einem Kapitaleinsatz von null, einen sofortigen risikolosen Gewinn durch das gleichzeitige Kaufen und Verkaufen von Finanzinstrumenten zu realisieren.

Der Einfachheit halber geht man in den weiteren Betrachtungen von Marktteilnehmern mit einer unendlich guten Bonität aus, sodass es keine Ausfallwahrscheinlichkeit gibt. Die Märkte, auf denen Zinsgeschäfte getätigt werden, sind der **Geld-** und der **Kapitalmarkt**. Neben dem Geld- und Kapitalmarkt hat sich in den letzten Jahren der **Swapmarkt** zu einem eigenständigen Markt entwickelt, der vom Geld- bzw. Kapitalmarkt beeinflusst wird.

**Definition 2.1.5** (Geldmarkt). *Der Geldmarkt umfasst alle kurzfristigen Anlagen bzw. Kredite mit Laufzeiten von einem Tag bis zu einem Jahr.*

- *EONIA (Euro Overnight Index Average) ist der Tagesgeldzinssatz für den Euro.*
- *LIBOR (London Interbank Offered Rate) sind die Referenzzinssätze mit der Laufzeit von einem Monat bis zu einem Jahr, mit denen sich Banken untereinander Geld leihen. LIBOR-Zinssätze werden für 10 verschiedene Währungen berechnet. Der Euro-LIBOR hat als Referenzzinssatz allerdings eine wesentlich geringere Bedeutung als der EURIBOR.*
- *EURIBOR<sup>2</sup> (Euro Interbank Offered Rate) sind die Referenzzinssätze mit der Laufzeit von einem Monat bis zu einem Jahr für den Euroraum.*



**Abbildung 2.1:** EURIBOR Zinssätze mit verschiedenen Laufzeiten

**Definition 2.1.6** (Kapitalmarkt). *Der Kapitalmarkt umfasst alle langfristigen Anlagen bzw. Kredite mit einer Laufzeit größer als ein Jahr. Er unterteilt sich in Aktien- und Bondmarkt.*

<sup>2</sup>Datenquelle: Bloomberg (Zinsstrukturen sind unter YCRV gelistet)

## 2.2 Bonds

**Bonds** (auch: festverzinsliche Wertpapiere, Anleihen, Pfandbriefe, Obligationen, Rentenpapiere) werden von den Marktteilnehmern zur Kreditfinanzierung emittiert. Der Käufer eines Bonds hat einen Anspruch auf regelmäßige Zinszahlungen (Kuponzahlungen) während der Laufzeit sowie die Zahlung eines Endbetrags zum Laufzeitende, den sogenannten **Nennwert**. Der aktuelle Wert eines Bonds ist der Barwert aller Zahlungsströme (Cash Flows) während der Laufzeit. Die Preisberechnung erfolgt in drei Schritten:

- Schritt 1: Ermittlung aller Cash Flows  $CF_t$  des Bonds bis zum Laufzeitende  $T$ .
- Schritt 2: Ermittlung der Discountfaktoren, mit denen die Barwerte (PV) der Cashflows berechnet werden.  $PV_0(CF_t) = \frac{CF_t}{(1+Y(0,t))^t}$
- Schritt 3: Berechnung des Bondpreises als Summe aller diskontierten Cash Flows:

$$PV_0(Bond) = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+Y(0,t))^t} \quad (2.1)$$

bzw. bei halbjährlicher Kuponzahlung

$$PV_0(Bond) = \sum_{t=1}^{2T} \frac{CF_t}{\left(1 + \frac{Y_2(0,t)}{2}\right)^t} \quad (2.2)$$

Der Bond garantiert zwar eine sichere, im Voraus festgelegte Auszahlung zum Laufzeitende  $T$ , doch während seiner Laufzeit ist das Preisverhalten zufällig. Dies liegt an dem stochastischen Discountfaktor  $(1+Y(0,t))^t$ . Wird ein Bond während seiner Laufzeit verkauft, muss der Käufer dem Verkäufer sogenannte **Stückzinsen** zahlen. Dabei handelt es sich um Zinsen, die seit der letzten Coupon-Zahlung des Bonds angefallen sind. Es kommt in der Regel folgende Formel zur Anwendung:

$$S = K \frac{d}{360}, \quad (2.3)$$

wobei  $S$  = Stückzinsen in Geldeinheiten,  $d$  = Tage seit letzter Coupon-Zahlung,  $K$  = Coupon in Geldeinheiten.

Die einfachste Struktur besitzt ein **Zero Bond** (auch: Nullkupon-, T-Bond). Bei einem Zero Bond gibt es keine Zinszahlungen während der Laufzeit. Der Käufer zahlt als Kaufpreis den um den Zinsertrag verringerten Nennwert von einer

Geldeinheit und erhält am Laufzeitende den vollen Nennwert zurück. Der Preis der Zero Bonds verhält sich während seiner Laufzeit zufällig. Falls der Marktzins sinkt, steigt der Preis des Zero Bonds und umgekehrt.

**Definition 2.2.1** (Zero Bond). *Ein Zero Bond ist ein Wertpapier, welches seinem Besitzer eine Auszahlung von einer Geldeinheit zum Zeitpunkt  $T$  garantiert. Den Preisprozess bezeichnet man mit*

$$B(\cdot, T) = (B(t, T))_{t \in [0, T]}, \quad \text{wobei } B(T, T) = 1$$

$B(t, T)$  ist der Wert des Zero Bonds zur Zeit  $t < T$ .

**Beispiel 2.2.1.** *Ein Unternehmen möchte sich zum Zeitpunkt  $t$  Geld über den Kapitalmarkt leihen und emittiert diesbezüglich einen Zero Bond zum Preis von  $B(t, T) = 0,9$  Geldeinheiten mit einer Laufzeit  $T = 1$  Jahr. Der Käufer dieses Zero Bonds erhält also in einem Jahr den Nennwert von einer Geldeinheit zurück und vermehrt seine Investition um 10%.*

Schon in diesem Beispiel wird deutlich, dass der Kauf eines Zero Bonds einer Festgeldanlage mit einer bestimmten Verzinsung entspricht. Wie später gezeigt wird, lassen sich Marktzinsen aus Zero Bond Preisen berechnen und umgekehrt. Ein Zero Bond zur Zeit  $t$  mit der Laufzeit  $T$  repräsentiert den Barwert einer Geldeinheit die in  $T$  gezahlt wird. Aus diesem Grund verwendet man Zero Bonds als Discountfaktoren. Bevor mit den Zinsberechnungen begonnen wird, muss der Zeitraum  $T - t$  bis zur Fälligkeit eines Bonds näher spezifiziert werden.

Der Zeitraum  $T - t$  ist die Summe an Jahren vom heutigen Tag  $t$  bis zur Fälligkeit  $T > t$ . Die Definition „ $T - t$ “ macht Sinn, solange  $t, T \in \mathbb{R}_0^+$ . In der Praxis drücken  $t$  und  $T$  zwei Kalendertage (Tag/Monat/Jahr) aus, die im Folgenden mit  $t = (d_1, m_1, y_1)$  und  $T = (d_2, m_2, y_2)$  bezeichnet werden. Wie wird die Anzahl der Tage  $T - t$  berechnet? Dazu gibt es verschiedene Ansätze.

**Definition 2.2.2** (Day Count Convention). <sup>3</sup> *Die Zeitdifferenz in Jahren zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $T$  wird mit  $\tau(t, T)$  bezeichnet und heißt Day Count Convention.*

Die Day Count Convention wird mit  $d/p$  angegeben, wobei  $d$  die Anzahl der Tage zwischen  $T - t$  angibt und  $p$  die Anzahl der Tage innerhalb eines Jahres. Es existieren mehrere Berechnungsmethoden, von denen drei vorgestellt werden.

---

<sup>3</sup>vgl. [Bri06] S.5 ff.

- Act/365: Die tatsächlichen Kalendertage zwischen  $t$  und  $T$  werden durch 365 geteilt, um den Zeitraum in Jahren zu erhalten.

$$\tau(t, T) = \frac{T - t}{365}$$

- Act/360: In diesem Fall ist ein Jahr 360 Tage lang und es folgt

$$\tau(t, T) = \frac{T - t}{360}$$

- 30/360: Bei dieser Konvention wird so gezählt als hätte jeder Monat 30 Tage und jedes Jahr genau 360 Tage. In diesem Fall berechnet sich der Zeitraum zwischen  $t$  und  $T$  über die Formel

$$\tau(t, T) = \frac{\max(30 - d_1, 0) + \min(d_2, 30) + 360(y_2 - y_1) + 30(m_2 - m_1 - 1)}{360}.$$

**Beispiel 2.2.2.** Zwischen dem 03.02.2008 =  $t$  und dem 03.08.2008 =  $T$  beträgt die Zeitdifferenz in Jahren  $\tau(t, T)$  bezüglich der aufgezählten Day-Count Conventions:

- Act/365:  $\tau(t, T) = \frac{182}{365} = 0,4986$
- Act/360:  $\tau(t, T) = \frac{182}{360} = 0,5055$
- 30/360:  $\tau(t, T) = \frac{(30-3)+3+360 \times 0 + 30 \times 5}{360} = 0,5$

Im obigen Beispiel sind die beiden Zeitpunkte zwei Werktage. Würde ein Zeitpunkt auf ein Wochenende oder einen Feiertag fallen, müssen die Konventionen dementsprechend adjustiert werden.

## 2.3 Zinsberechnungsmethoden

Alle Zinssätze lassen sich bezüglich Zero Bonds definieren und umgekehrt. Zuerst werden die **Forward Rates** über eine Handelsstrategie hergeleitet, aus denen sich im Anschluss die **Spot Rates** ableiten lassen. Dazu verkauft man zum Zeitpunkt  $t$  einen S-Bond  $B(t, S)$  und kauft dafür  $\frac{B(t, S)}{B(t, T)}$  Anteile  $B(t, T)$  Bonds. Zum Zeitpunkt  $t$  hat die Transaktion den Wert

$$+B(t, S) - \frac{B(t, S)}{B(t, T)} B(t, T) = 0.$$

In  $S$  muss man  $-1$  Geldeinheiten bezahlen (wegen des verkauften S-Bonds) und in  $T$  bekommt man  $\frac{B(t, S)}{B(t, T)} B(t, T) = \frac{B(t, S)}{B(t, T)} \times 1$  Geldeinheiten.



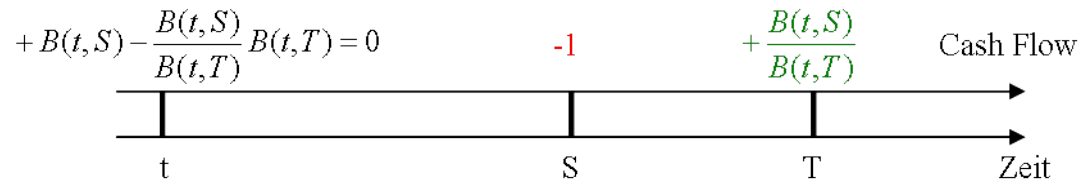


Abbildung 2.2: Replikation einer Forward Rate mittels Zero Bonds

D.h. zum Zeitpunkt  $S$  wird eine Geldeinheit zwischen  $[S, T]$  angelegt, die sich bis zum Zeitpunkt  $T$  mit einem in  $t$  fixierten Zinssatz  $F$  zu  $\frac{B(t,S)}{B(t,T)}$  Geldeinheiten vermehrt. Die einfache Forward Rate  $F(t; S, T)$  wurde repliziert mit Hilfe von Zero Bonds und ist gegeben durch

$$1 + F(t; S, T)\tau(T, S) = \frac{B(t, S)}{B(t, T)}$$

**Definition 2.3.1** (Einfache Forward Rate, einfache Spot Rate). Die **einfache Forward Rate** zum Zeitpunkt  $t$  für den Zeitraum  $[S, T]$  ist bestimmt durch

$$1 + F(t; S, T)\tau(T, S) = \frac{B(t, S)}{B(t, T)}$$

$\Leftrightarrow$

$$F(t; S, T) = \frac{B(t, T) - B(t, S)}{\tau(S, T)B(t, T)}. \quad (2.4)$$

Die **einfache Spot Rate**, definiert durch  $L(t, T) := F(t; t, T)$ , ist demnach gegeben durch

$$L(t, T) = \frac{B(t, T) - 1}{\tau(t, T)B(t, T)}. \quad (2.5)$$

Aufgelöst nach dem Zero Bond Preis folgt

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)}. \quad (2.6)$$

Die am Markt notierten LIBOR bzw. EURIBOR Zinssätze sind einfache Spot Raten und sind mit den Zero Coupon Bond Preisen über die Day Count Convention „Act/360“ verbunden. Bei Verzinsungsperioden, die kleiner als ein Jahr sind, wird meistens die einfache Verzinsung gewählt. Bei Laufzeiten größer als ein Jahr wird die jährliche Verzinsung verwendet, d.h. der Zinsfaktor  $q_Y = (1 + Y)^t$  kommt zum Einsatz.

**Definition 2.3.2** (Jährliche Forward Rate, jährliche Spot Rate). Die **jährliche Forward Rate** ist zum Zeitpunkt  $t$  für den Zeitraum  $[S, T]$  bestimmt durch

$$(1 + F_Y(t; S, T))^{\tau(T, S)} = \frac{B(t, S)}{B(t, T)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F_Y(t; S, T) = \left( \frac{B(t, S)}{B(t, T)} \right)^{\frac{1}{\tau(t, T)}} - 1. \quad (2.7)$$

Die **jährliche Spot Rate**, definiert durch  $Y(t, T) := F_Y(t; t, T)$ , ist demnach gegeben durch

$$Y(t, T) = \frac{1}{B(t, T)^{\frac{1}{\tau(t, T)}}} - 1 \quad (2.8)$$

und für die Zero Bond Preise

$$B(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)}}. \quad (2.9)$$

**Definition 2.3.3** (Stetige Forward Rate, stetige Spot Rate). Die **stetige Forward Rate** wird analog mittels des stetigen Zinsfaktors  $q_R = e^{Rt}$  zum Zeitpunkt  $t$  für den Zeitraum  $[S, T]$  bestimmt durch

$$e^{f(t; S, T)\tau(T, S)} = \frac{B(t, S)}{B(t, T)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(t; S, T) = -\frac{\ln(B(t, T)) - \ln(B(t, S))}{\tau(S, T)}. \quad (2.10)$$

Für die **stetige Spot Rate** erhält man durch  $R(t, T) := f(t; t, T)$

$$R(t, T) = -\frac{\ln(B(t, T))}{\tau(t, T)} \quad (2.11)$$

und für die Zero Bond Preise

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)}. \quad (2.12)$$

Als nächstes folgt die Definition eines **Geldmarktkontos**. Dazu betrachtet man einen Zinssatz  $r(t)$ , der den Wert eines Bankkontos  $B(t)$  für einen kurzen Zeitabschnitt  $[t, t + \Delta t)$  verzinst, d.h.  $B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r(t)\Delta t)$ .  $r(t)$  ist die momentane kurzfristige Spot Rate und wird auch als **Short Rate** bezeichnet.

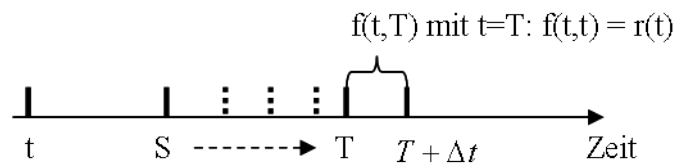
**Definition 2.3.4** (Geldmarktkonto).  $B(t)$  sei der Wert eines handelbaren Geldmarktkontos zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Es gilt  $B(0) = 1$ . Die Entwicklung des Bankkontos ist durch die Differentialgleichung

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1 \quad (2.13)$$

gegeben, wobei  $r(t)$  eine positive Funktion der Zeit ist. Für  $B(t)$  folgt

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right). \quad (2.14)$$

Analog zur kurzfristigen Spot Rate ist es möglich, eine **kurzfristige Forward Rate** zu definieren. Dazu lässt man in (2.7)  $S$  gegen  $T$  laufen.



**Abbildung 2.3:** Zeitverlauf der kurzfristigen Zinssätze

**Definition 2.3.5** (kurzfristige Forward Rate). Die **kurzfristige Forward Rate** wird definiert über  $f(t; S, T)$  durch

$$f(t, T) := \lim_{S \uparrow T} f(t; S, T) = \lim_{S \uparrow T} \frac{\ln(B(t, T)) - \ln(B(t, S))}{\tau(S, T)} = -\frac{d \ln(B(t, T))}{dT}. \quad (2.15)$$

Die Zero Bond Preise lassen sich folgendermaßen berechnen

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, s) ds &= \int_t^T -\frac{d \ln(B(t, s))}{ds} ds = -(\underbrace{\ln(B(t, t))}_{=0} - \ln(B(t, T))) \\ \Rightarrow B(t, T) &= -e^{\int_t^T f(t, s) ds}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

## 2.4 Zinsstrukturkurve

Die zeitliche Abfolge von Zinssätzen stellt man mit der sogenannten **Zinsstrukturkurve** (auch: yield curve, term structure) dar.

**Definition 2.4.1** (Zinsstrukturkurve). Bei der **Zinsstrukturkurve** handelt es

sich um eine Abfolge von Spot Rates verschiedener Laufzeiten. Die Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt  $t$  ist der Graph der Funktion

$$T \mapsto \begin{cases} L(t, T) & t < T \leq t + 1(\text{Jahre}), \\ Y(t, T) & T > t + 1(\text{Jahre}). \end{cases} \quad (2.17)$$

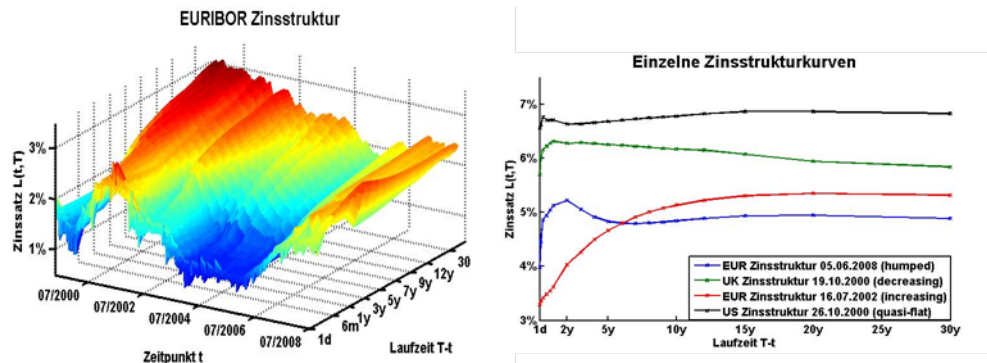
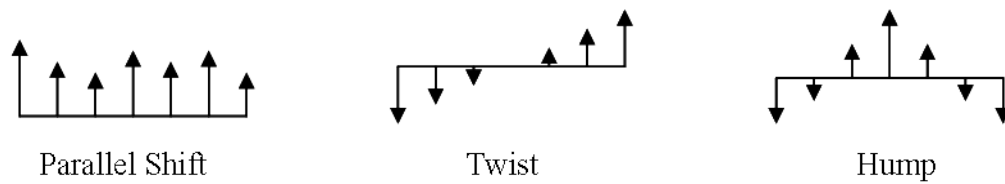


Abbildung 2.4: EURIBOR Zinsstruktur von Januar 1999 - Juli 2008

Der Graph zum Zeitpunkt  $t$  der Zinsstrukturkurve stellt die einfachen Spot Rates aller Laufzeiten  $T$  bis zu einem Jahr und die jährlichen Spot Rates aller Laufzeiten  $T$  größer als ein Jahr dar. Wie in Abbildung 2.4 dargestellt, kann es zu verschiedenen Ausprägungen der Form der Kurve kommen. Zu den typischen Formen gehört die steigende, fallende, flache und bucklige („humped“) Zinsstrukturkurve. Die drei häufigsten Änderungsszenarien sind schematisch in Abbildung 2.5 abgebildet. Dazu gehört der **Parallel-Shift** der Zinsstrukturkurve, der durch einen Anstieg (oder eine Reduzierung) um eine bestimmte Anzahl von Basispunkten <sup>4</sup> über alle Laufzeiten beschrieben wird. Zu diesem Szenario gehört auch das Abflachen oder Ansteigen der Kurve. Ein weiteres Szenario ist die Drehung der Zinsstrukturkurve, der sogenannte **Twist**. Bei diesem Szenario steigen die Zinsen am kurzen und fallen am langen Ende oder umgekehrt. Zu den weniger häufig auftretenden Szenarien gehört der sogenannte **Hump**. Dieses Szenario beschreibt das Entstehen eines Buckels an einer Stelle der Zinskurve. Die später durchgeführte Hauptkomponentenanalyse liefert ebenfalls diese rein optisch festgestellten Formen.

Die genannten Szenarien stellen die typischen Bewegungen einer Zinsstrukturkurve dar. Allerdings gibt es eine Vielzahl von anderen beobachtbaren Ausprägungen der Zinsstrukturkurve, die teilweise aus Kombinationen der obigen bestehen. Das Entstehen von zwei lokalen Minima bzw. Maxima ist nur eine davon. Sollen nun Zinsprodukte hinsichtlich ihrer P&L Verteilung analysiert werden, braucht

<sup>4</sup>Ein Basispunkt (1 BP) entspricht 0,01%



**Abbildung 2.5:** Typische Zinskurven-Szenarien

man ein Zinsmodell, welches jede mögliche realistische Ausprägung der Zinsstrukturkurve mit ihren jeweiligen Häufigkeiten modelliert.

Verschiedene ökonomische Erklärungsmodelle versuchen, die unterschiedlichen Formen der Zinsstrukturkurven zu beschreiben<sup>5</sup>. Darüberhinaus gibt es eine Vielzahl von **Zinsmodellen**, die empirisch beobachtbare Zusammenhänge zwischen Zinssätzen unterschiedlicher Laufzeiten beschreiben sollen. Die bekanntesten Modelle sind die sogenannten Zinsstrukturmodelle, die hauptsächlich der Bewertung („Pricing“) von Zinsderivaten dienen und dementsprechend die Zinsen unter einem risikoneutralen Maß modellieren. Eine Übersicht der bekannten Zinsmodelle wird in Kapitel 4 aufgestellt. In dieser Arbeit soll ein Zinsmodell erarbeitet werden, welches Zinsstrukturkurven unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß abbildet. Verschiedene Modelle werden dabei miteinander verglichen. Die Kriterien, die ein Modell im realen Maß erfüllen sollte, werden im vierten Kapitel näher erläutert.

#### BESTIMMUNG DER ZINSSTRUKTURKURVE

Zur Bestimmung der Zinsstrukturkurve gibt es verschiedene Möglichkeiten. Im unterjährigen Bereich verwendet man in der Praxis häufig LIBOR oder EURIBOR Geldmarktsätze. Oftmals werden auch Zins-Futures zur Bestimmung der Zinssätze bis zu einer Laufzeit von zwölf Monaten verwendet. Ein Zins-Future ist ein Termingeschäft, welches dem Käufer einen festen Zinssatz für eine zukünftige Periode garantiert.<sup>6</sup> Aus den daraus gewonnenen Forward Rates lassen sich dann die Spot Rates berechnen. Ein wichtiger Grund für die Verwendung von Futures ist deren hohe Liquidität, d.h. sie werden am Markt stark gehandelt. Die daraus resultierenden Zinssätze spiegeln die Markterwartungen am besten wieder.

Zur Ermittlung von Zinssätzen mit Laufzeiten größer als zwölf Monate verwendet man Coupon Bonds mit sehr guter Bonität wie z.B. Staatsanleihen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Spot Rates aus den Coupon Bonds herauszurechnen<sup>7</sup>, deren Ergebnisse sich voneinander unterscheiden können. Da man in der Praxis

<sup>5</sup>vgl. [Mar03] S. 81 ff.

<sup>6</sup>vgl. [Hul06] S. 178 ff.

<sup>7</sup>vgl. [Mar01] S. 4 ff.

auf eine allgemeingültige Zinsstruktur angewiesen ist, insbesondere beim Pricing und Hedging von Zinsderivaten, ermittelt man die Spot Rates über **Zinsswaps**. Unter einen Zinsswap versteht man die Vereinbarung zweier Marktteilnehmer (A und B), Zinszahlungen für eine vereinbarte Zeit zu tauschen. Ein Marktteilnehmer A (Fix Payer) zahlt auf einen festgelegten Nominalbetrag einen fixen Zinssatz, den sogenannten Swapsatz. Der zweite Marktteilnehmer B (Fix Receiver) zahlt auf denselben Nominalbetrag einen variablen Zinssatz (z.B. 3-Monats-LIBOR). Marktteilnehmer A hält in diesem Fall einen Payer Swap und Marktteilnehmer B einen Receiver Swap.<sup>8</sup>



Abbildung 2.6: Zahlungsflüsse eines Swaps

Um den Wert eines Payer Swaps (PS)<sup>9</sup> zum Zeitpunkt  $t$  zu berechnen, betrachtet man eine Menge  $T := \{T_\alpha, \dots, T_\beta\}$  von Zeitpunkten der zugrunde liegenden Laufzeit des Swaps. Zu den Zeitpunkten  $T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}$  werden die variablen Zinsen fixiert, die der Besitzer des Payer Swaps zu den Zeitpunkten  $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \dots, T_\beta$  erhält. Die Cash Flows aus Sicht des Halters betragen dann  $-N\tau_i K$  und  $+N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$ , wobei  $N$  den Nominalbetrag,  $K$  den festen Zins und  $\tau_i$  die Zeitspannen zwischen  $T_{i-1}$  und  $T_i$  mit der entsprechenden Day Count Convention darstellen. Den Wert des Payer Swaps zum Zeitpunkt  $t$  erhält man über die Barwertformel (2.1.3). Da die Spot Rates  $L(T_{i-1}, T_i)$  zum Zeitpunkt  $t$  nicht bekannt sind, werden Forward Rates zur Berechnung herangezogen

$$PS(t, T, \tau, N, K) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i B(t, T_i) (F(t; T_{i-1}, T_i) - K). \quad (2.18)$$

In Abbildung 2.7 sind die Cash Flows eines Payer Swaps im Zeitverlauf mit der dazugehörigen Barwertberechnung zu sehen. In diesem Beispiel wird  $\alpha = 0$  und  $\beta = 2$  gesetzt.

Die Swaprate  $K$  für die  $PS(t, T, \tau, N, K) = 0$  gilt, nennt man **Par Rate**. Aus Sicht des Halters ist der Payer Swap ein Portfolio aus einem verkauften Coupon Bond mit der Swaprate als Coupon und einem gekauften variabel verzinsten Bond,

<sup>8</sup>Zinsswaps bilden das wichtigste und liquideste Segment im Zinsbereich.

<sup>9</sup>vgl. [Bri06] S.13 ff.

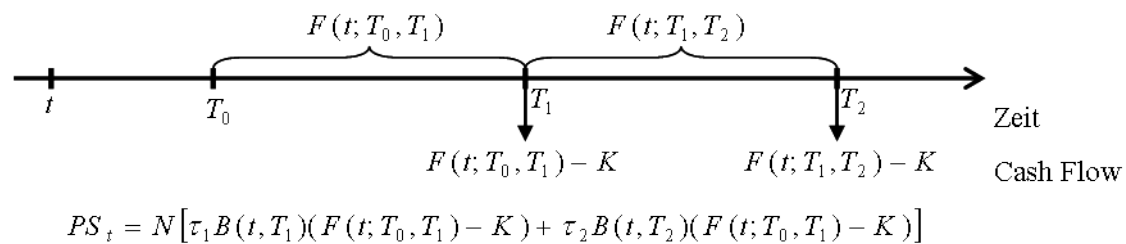


Abbildung 2.7: Cash Flows eines Receiver Swaps

der die LIBOR Rate als Coupon zahlt. Da Zinssätze bei variabel verzinsten Bonds an die aktuelle Marktsituation angepasst sind, notiert dieser Bond zu pari. Ist der Swap bei Vertragsabschluss fair, d.h.  $K$  ist so gewählt, dass  $PS(t, T, \tau, N, K) = 0$  gilt, dann muss auch der Coupon Bond zu pari notieren und der Coupon  $K$  entspricht dem variablen LIBOR Zins zu diesem Zeitpunkt. Dementsprechend lassen sich die Par Rates von Swaps als Renditen von zu pari notierten Coupon Bonds interpretieren<sup>10</sup>.

## 2.5 Empirische Analyse der Zinsstruktur

In diesem Abschnitt werden die EURIBOR Zinsstrukturkurven zwischen Januar 1999 und Juli 2008 auf ihre empirischen Eigenschaften hin untersucht. Ziel ist später, anhand dieser Ergebnisse die Zinsmodelle auf ihre Realitätsnähe zu untersuchen. Es werden deskriptive Statistiken und Korrelationen der Zinsen und Zinsänderungen analysiert. Es folgen Krümmungsuntersuchungen der Zinskurven und eine Mean Reverting Analyse. Zum Schluss wird eine Hauptkomponentenanalyse mit den Daten durchgeführt.

### 2.5.1 Daten

Die zugrunde liegenden Daten sind EURIBOR Zinssätze vom 5. Januar 1999 bis zum 4. Juli 2008 ( $T = 2481$  Tage). Der Tagesgeldzinssatz ist der EONIA-Zins, die Zinssätze mit der Laufzeit von einem Monat bis zu einem Jahr sind Geldmarktsätze und die Zinsen mit einer Laufzeit größer als ein Jahr sind Swap Rates. Insgesamt wird die Zinsstrukturkurve durch neunzehn Zinssätze mit den Laufzeiten ein Tag, ein Monat, drei, sechs, neun und zwölf Monate sowie 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20 und 30 Jahren beschrieben. Der Verlauf einzelner Zinszeitreihen wird in Abbildung 2.1 dargestellt. In Abbildung 2.4 ist der gesamte zeitliche Verlauf der Zinsstruktur zu sehen. Im Folgenden werden die logarithmierten Zinssätze mit

<sup>10</sup>vgl. [Uhr02]

$y_j^t$  bezeichnet, wobei  $t = 1, 2, \dots, T$  und  $j = 1, 2, \dots, 19^{11}$ .  $\Delta y_j^t$  bezeichnet als Differenz von Logarithmen die relative Änderung vom Zins  $j$  zwischen dem Tag  $t$  und dem Tag  $t - 1$ :

$$\Delta y_j^t = y_j^t - y_j^{t-1} \quad t = 2, \dots, T$$

### 2.5.2 Zinsen $y_j^t$

Im Folgenden Abschnitt werden die Zinssätze hinsichtlich ihrer (statistischen) Eigenschaften beschrieben. Mit der Steigungs- und Krümmungsverteilung werden Statistiken eingeführt, um die Form der Zinskurven näher zu untersuchen.

#### Deskriptive Statistik

	1d	3m	6m	12m	2y	5y	10y	20y	30y
<b>Min</b>	1,34%	1,96%	1,92%	1,93%	2,01%	2,62%	3,13%	3,56%	3,65%
<b>Max</b>	5,75%	5,14%	5,20%	5,44%	5,58%	5,78%	6,02%	6,37%	6,38%
<b>Mittelwert</b>	3,13%	3,29%	3,34%	3,45%	3,66%	4,13%	4,60%	4,96%	5,01%
<b>Stabw</b>	0,91%	0,97%	0,97%	0,98%	0,91%	0,78%	0,72%	0,69%	0,68%
<b>Var</b>	8,28E-05	9,43E-05	9,48E-05	9,61E-05	8,25E-05	6,05E-05	5,12E-05	4,77E-05	4,57E-05
<b>Schiefe</b>	0,352	0,288	0,243	0,189	0,126	0,165	0,179	0,096	0,066
<b>Kurtosis</b>	-0,952	-1,243	-1,244	-1,235	-1,133	-0,911	-0,836	-0,889	-0,913

**Tabelle 2.1:** Statistiken der Zinsen für ausgewählte Laufzeiten

	1d	1m	3m	6m	12m	2y	5y	7y	10y	15y	20y	30y
<b>1d</b>	1											
<b>1m</b>	0,979	1										
<b>3m</b>	0,957	0,990	1									
<b>6m</b>	0,939	0,977	0,994	1								
<b>12m</b>	0,906	0,949	0,974	0,992	1							
<b>2y</b>	0,860	0,896	0,919	0,947	0,974	1						
<b>5y</b>	0,770	0,790	0,800	0,825	0,858	0,940	1					
<b>7y</b>	0,716	0,727	0,727	0,748	0,777	0,876	0,987	1				
<b>10y</b>	0,657	0,659	0,651	0,666	0,689	0,799	0,951	0,989	1			
<b>15y</b>	0,601	0,596	0,581	0,589	0,606	0,719	0,903	0,960	0,991	1		
<b>20y</b>	0,564	0,555	0,535	0,539	0,552	0,667	0,867	0,935	0,977	0,996	1	
<b>30y</b>	0,523	0,509	0,485	0,485	0,495	0,613	0,827	0,904	0,957	0,986	0,996	1

**Tabelle 2.2:** Korrelationsmatrix der EURIBOR Zinsen

Aus den Daten ist zu erkennen, dass die Zinsen nicht negativ werden. Das Minimum liegt beim Tageszins bei 1,34% und das Maximum beim 30- Jahreszins bei 6,38%. Die Volatilität<sup>12</sup> steigt bis zum zwölf-Monatszins an und fällt anschließend wieder ab. Die in Abbildung 2.1 gezeigten Zinsverläufe deuten auf starke Korrelationen unter den Zinsen hin. Die Korrelationstabelle 2.2 bestätigt diesen Verdacht. Mit

<sup>11</sup> $t = 1$  entspricht dem 5. Januar 1999, ...,  $T = 2481$  dem 4. Juli 2008,  $j = 1$  dem Tageszins, ...,  $j = 19$  dem 30 Jahres Zins

<sup>12</sup>Standardabweichung



ansteigenden Laufzeitdifferenzen fallen die Korrelationen ab. Zusammenfassend sind folgende Ergebnisse der untersuchten Zinsen zu nennen:

- Zinsen werden nicht negativ;
- im Beobachtungszeitraum bewegen sich die Zinsen verschiedener Laufzeit im Bereich zwischen 1,34% und 6,38%;
- Zinsen mit kurzer Laufzeit sind volatiler als langlaufende Zinsen;
- Zinsen mit unterschiedlichen Laufzeiten sind untereinander stark korreliert.

Ein Realwelt-Zinsmodell für den EURIBOR sollte annähernd diese Eigenschaften abbilden können. Des Weiteren ist die Form der Zinsstrukturkurve entscheidend. Unrealistische Ausprägungen der Kurven können vor allem bei Zinsprodukten, die sehr sensitiv bezüglich der Form der Zinskurve sind (z.B. Steepener), zu nicht realistischen Auszahlungsszenarien führen.

### Form der Zinsstrukturkurven

Zuerst wird die Anzahl der lokalen Maxima und Minima einer Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt  $t$  untersucht. Ein lokales Maximum (Minimum) tritt bei einer Funktion auf, wenn in der Umgebung eines betrachteten Funktionswerts keine kleineren (größer) Funktionswerte vorkommen, d.h.

$$y_{i-i}^t < y_i^t > y_{i+1}^t \quad \text{bzw.} \quad y_{i-i}^t > y_i^t < y_{i+1}^t.$$

lokale Extrema	abs. Häufigkeit	rel. Häufigkeit
0	1065	43,0%
1	609	24,6%
2	501	20,2%
3	270	10,9%
4	17	0,7%
5	17	0,7%

**Tabelle 2.3:** Auswertung der lokalen Extrema über alle vorhandenen Zinssätze

Anhand der Auswertung ist zu sehen, dass die Mehrzahl der Zinskurven keinen bis einen lokalen Extrempunkt besitzen. Die meisten „Dellen“ treten am kurzen Ende der Zinskurven auf. Dies ist ein Zeichen für relativ glatte Zinskurven insbesondere am langen Ende. Maximal können fünf lokale Extrema auftreten, dies kommt aber nur in 0,7% aller Fälle vor. Drei oder mehr lokale Dellen sind in 12,3% aller Fälle zu finden.

Um den Verlauf der Zinsstrukturkurven angemessen beschreiben zu können, betrachtet man die **Steigungen** und **Krümmungen** bzw. deren **Verteilungen**. Unter der Krümmung einer Kurve versteht man die Richtungsänderung pro Längeneinheit. Die Krümmung einer Geraden ist überall gleich null, da sie keine Richtungsänderungen aufweist. Ein Kreis hingegen hat überall die gleiche Krümmung, weil sich seine Richtung überall gleich stark ändert. Bei anderen Kurven, wie z.B. den Zinsstrukturkurven, wechselt die Krümmung von Kurvenpunkt zu Kurvenpunkt. Die Krümmung einer Funktion ist die Steigung der Steigung dieser Funktion und wird mit der zweiten Ableitung beschrieben. Ist die Krümmung an einem Punkt negativ, also  $f''(x) < 0$ , so ist die Funktion an dieser Stelle konkav. Bei einer positiven Krümmung, d.h.  $f''(x) > 0$ , ist die Funktion konvex. Da die Gitterpunkte (Laufzeiten in Jahren)  $T_j$  für  $j = 1, \dots, N$  (z.B.  $T_1 = 1/365$ ,  $T_2 = 1/12$ ,  $\dots, T_9 = 30$ ) nicht äquidistant sind und man die Daten nicht unnötig durch Interpolationen verzerren will, wird eine diskrete Berechnungsformel für die Krümmung  $\kappa_j^t$  verwendet. Es werden zuerst die Sekantensteigungen zwischen den Gitterpunkten  $T_{j+1}, T_j$  für  $j = 1, \dots, N - 1$ :

$$s_j^t = \frac{y_{j+1}^t - y_j^t}{T_{j+1} - T_j}$$

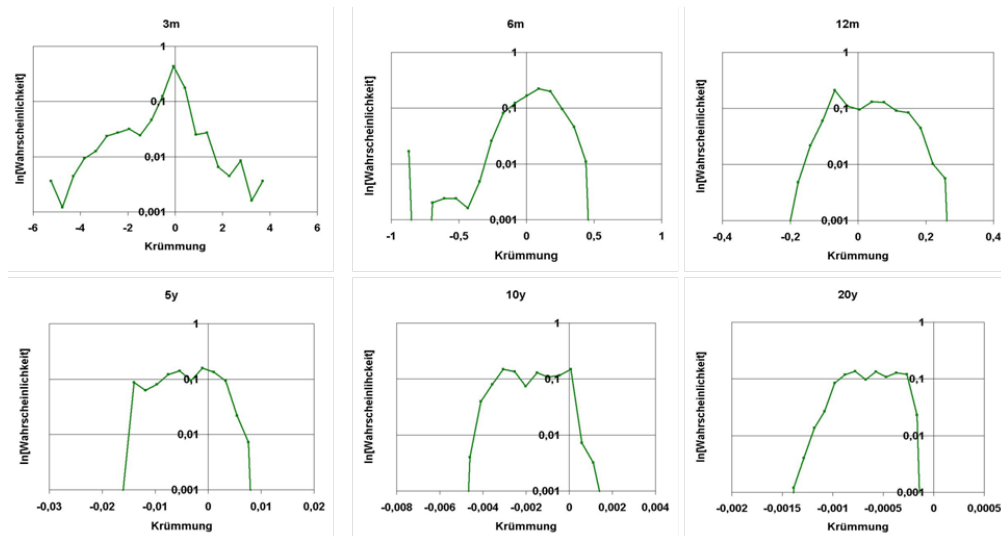
berechnet, um anschließend nochmals mit diesen Werten die Sekantensteigung zwischen den Gitterpunkten  $\frac{T_{j+1}+T_j}{2}$ ,  $\frac{T_j+T_{j-1}}{2}$  für  $j = 2, \dots, N - 1$  zu berechnen:

$$\kappa_j^t = \frac{s_j^t - s_{j-1}^t}{\frac{T_{j+1}+T_j}{2} - \frac{T_j+T_{j-1}}{2}} = \frac{s_j^t - s_{j-1}^t}{\frac{T_{j+1}-T_{j-1}}{2}} \quad (2.19)$$

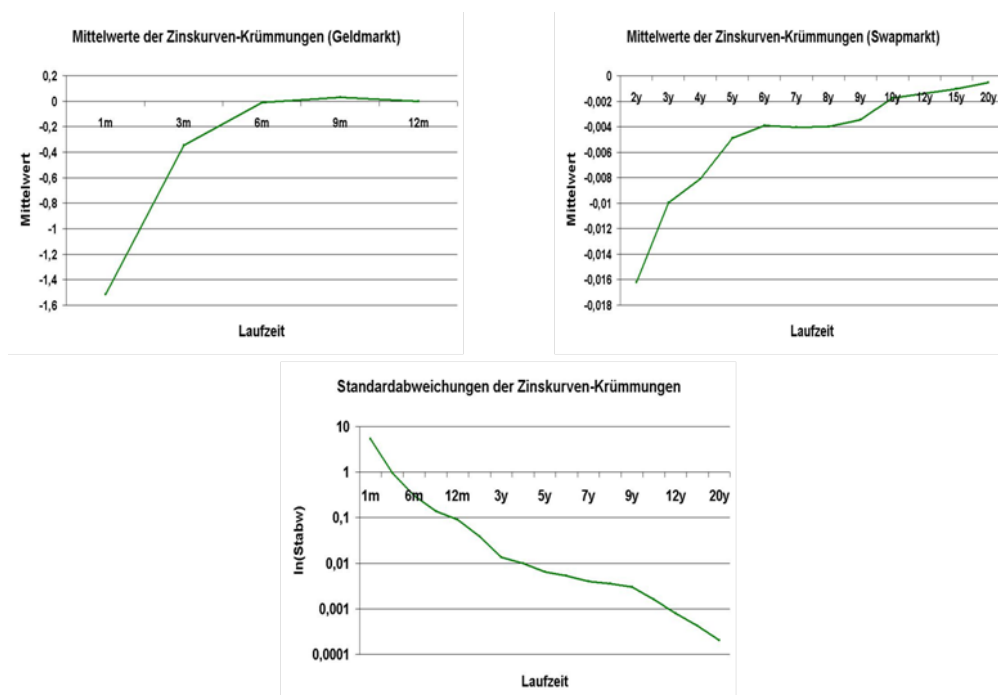
In der folgenden Tabelle sind die Statistiken der berechneten Werte dargestellt:

<b>Laufzeit (approximiert)</b>	<b>1d-3m-6m 0,251</b>	<b>3m-6m-12m 0,625</b>	<b>6m-12m-2y 3</b>	<b>12m-2y-5y 7,5</b>	<b>2y-5y-10y 6</b>	<b>5y-10y-20y 12,5</b>	<b>10y-20y-30y 20</b>
<b>Min</b>	-10,59	-1,262	-0,214	-0,077	-0,016	-0,0049	-0,0014
<b>Max</b>	4,747	0,418	0,296	0,083	0,0065	0,0011	-1,86E-04
<b>Mittelwert</b>	-0,534	0,0036	0,0043	-0,013	-0,0054	-0,0020	-6,75E-04
<b>Stabw</b>	1,177	0,219	0,090	0,024	0,0054	0,001	2,54E-04
<b>Var</b>	1,385	0,048	0,0081	5,54E-04	2,91E-05	1,69E-06	6,47E-08
<b>Schiefe</b>	-1,455	-2,405	0,249	0,680	-0,171	-0,031	-0,166
<b>Kurtosis</b>	7,440	10,335	-0,798	0,847	-0,912	-1,149	-0,910

**Tabelle 2.4:** Deskriptive Statistik der Krümmungen



**Abbildung 2.8:** Verteilungen der Krümmung für ausgewählte Laufzeiten zwischen 3m und 20y. Die logarithmierten relativen Häufigkeiten werden auf der y-Achse dargestellt



**Abbildung 2.9:** Mittelwerte und Standardabweichungen der EURIBOR Zinskrümmungen

In Abbildung 2.8 ist die Verteilung der Krümmung für verschiedene Laufzeiten abgebildet. Es ist zu beobachten, dass die Verteilung am kurzen Ende breiter ist als am langen Ende der Zinskurve. Dies wird durch die Standardabweichung in Abbil-

dung 2.9 bestätigt. Dieses Ergebnis macht deutlich, dass die Zinskurven am kurzen Ende „kurviger“ (welliger) sind als am langen Ende. Um bei der Modellierung von Zinskurven eine realistische Form zu bekommen, ist es notwendig, dass die Krümmungsverteilung der modellierten Kurven annähernd mit denen der historischen Kurven übereinstimmt.

### 2.5.3 Zinsänderungen $\Delta y_j^t$

Wie im obigen Abschnitt die Zinsen selbst werden nun ihre Änderungen untersucht. Dabei wird vor allem der Mean Reverting Effekt der Zinsen näher betrachtet. Im direkten Zusammenhang werden die fortlaufenden Varianzen der q-Tagesänderungen und die Lag-1 Autokorrelationen der q-Tagesänderungen näher analysiert. Im Anschluss wird eine Hauptkomponentenanalyse (PCA) mit der Matrix der Zinsänderungen durchgeführt. Es stellt sich heraus, dass über 80% der Dynamik der Zinsstruktur durch die ersten beiden Komponenten beschrieben werden.

#### Deskriptive Statistik

	1d	3m	6m	12m	2y	5y	10y	20y	30y
<b>Min</b>	-30,83%	-9,05%	-7,31%	-6,41%	-4,66%	-4,79%	-3,96%	-3,21%	-3,07%
<b>Max</b>	43,49%	13,37%	4,15%	5,56%	7,98%	6,57%	4,75%	3,74%	3,43%
<b>Mittelwert</b>	-0,0007%	0,0174%	0,0191%	0,0212%	0,0198%	0,0139%	0,0073%	0,0030%	0,0007%
<b>Stabw</b>	4,34%	0,57%	0,59%	0,88%	1,23%	1,16%	0,90%	0,80%	0,79%
<b>Var</b>	1,88E-03	3,22E-05	3,54E-05	7,79E-05	1,50E-04	1,34E-04	8,12E-05	6,45E-05	6,23E-05
<b>Schiefe</b>	1,415	2,380	-1,023	0,188	0,653	0,489	0,349	0,314	0,260
<b>Kurtosis</b>	25,987	175,306	23,530	6,064	3,742	2,481	1,573	1,168	1,022

**Tabelle 2.5:** Statistiken der Zinsänderungen für ausgewählte Laufzeiten

	1d	1m	3m	6m	12m	2y	5y	7y	10y	15y	20y	30y
<b>1d</b>	1											
<b>1m</b>	0,126	1										
<b>3m</b>	0,089	0,607	1									
<b>6m</b>	0,071	0,508	0,743	1								
<b>12m</b>	0,059	0,330	0,561	0,895	1							
<b>2y</b>	0,026	0,064	0,166	0,314	0,381	1						
<b>5y</b>	0,005	0,028	0,101	0,203	0,270	0,892	1					
<b>7y</b>	0,008	0,007	0,075	0,162	0,228	0,871	0,932	1				
<b>10y</b>	0,010	-0,002	0,059	0,130	0,191	0,812	0,891	0,975	1			
<b>15y</b>	0,001	-0,020	0,031	0,084	0,137	0,750	0,843	0,939	0,971	1		
<b>20y</b>	0,011	-0,023	0,020	0,057	0,105	0,706	0,813	0,913	0,954	0,968	1	
<b>30y</b>	0,009	-0,027	0,006	0,037	0,080	0,673	0,779	0,888	0,934	0,957	0,978	1

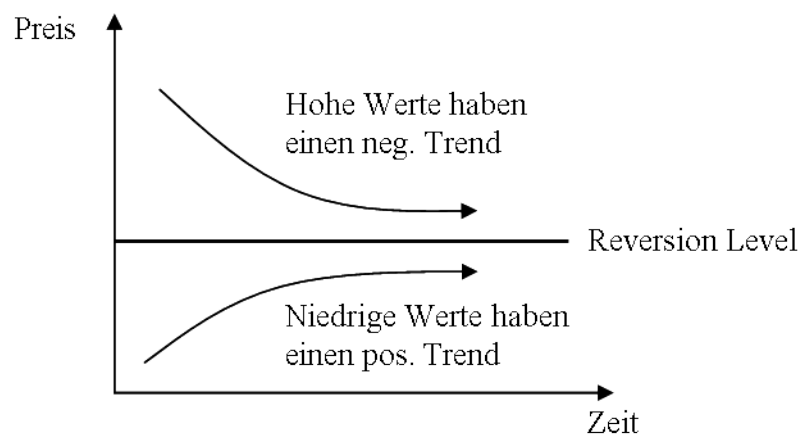
**Tabelle 2.6:** Korrelationsmatrix der Zinsänderungen

In der Tabelle 2.5 sind die Statistiken der Zinsänderungen zu finden. Es ist zu erkennen, dass die Volatilität ein Maximum beim Tageszins sowie um den Zweijahreszins besitzt. Der Mittelwert der Zinsänderung liegt nahe bei null. Die Korrelationen der Zinsänderungen sind in Tabelle 2.6 gelistet. Der Tageszins scheint mit

den anderen Zinssätzen nicht wesentlich korreliert zu sein. In einigen Fällen sind die kurzlaufenden Zinssätze untereinander stark korreliert. Ein Abfall der Korrelation nimmt mit der Laufzeitdifferenz zu. Auffällig ist, dass die langlaufenden Zinssätze untereinander stärker korrelieren als die kurzlaufenden Zinsen.

### Mean Reverting, Varianz und Autokorrelation

Unter Mean Reverting versteht man die Eigenschaft, dass Zinsen im Laufe der Zeit nicht beliebig wachsen oder fallen können, sondern tendenziell um ein langfristiges Mittel pendeln.<sup>13</sup>



**Abnahme der Varianz der Preisänderungen im Zeitverlauf**

**Abbildung 2.10:** Mean Reverting Effekt

Eine Möglichkeit, Mean Reverting in Zeitreihen festzustellen, ist der **Varianz-Ratio Test** von Lo und MacKinley (1988). Es wird davon ausgegangen, dass der logarithmierte Preisprozess  $y_j^t$  einen Random Walk mit Drift  $\mu$  bildet

$$y_j^t = \mu + y_j^{t-1} + \epsilon_t. \quad (2.20)$$

$\epsilon_t$  sei ein zufälliger Störterm mit dem Erwartungswert  $E(\epsilon_t) = 0$  für alle  $t$ . Die Random-Walk-Nullhypothese  $H_0$  unterstellt, dass die zufallsbedingten Schocks  $\epsilon_t$  voneinander unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen mit der konstanten Varianz  $\sigma^2$  sind, kurz

$$H_0 : \epsilon_t \text{ i.i.d. } N(0, \sigma^2), \quad \forall t$$

Da alle Schocks  $\epsilon_t$  identisch mit derselben Varianz  $\sigma^2$  für alle  $t$  verteilt sind, stellt

<sup>13</sup>vgl. [Deu04] S. 276

$H_0$  die Nullhypothese für das Vorliegen eines *homoskedastischen* Random Walks dar. Lo und Macinley (1988) entwickelten die dazugehörige Teststatistik.

Eine wichtige Eigenschaft des Random Walks besteht darin, dass die Varianz der ersten Differenz  $y_j^t - y_j^{t-1}$  linear mit der Zeit  $t$  wächst, d.h. es gilt:

$$\text{Var}(y_j^t - y_j^{t-q}) = q \text{Var}(y_j^t - y_j^{t-1}) \quad (2.21)$$

Daraus folgt die Varianz-Ratio  $VR(q)$ :

$$VR(q) = \frac{\text{Var}(y_j^t - y_j^{t-q})}{q \text{Var}(y_j^t - y_j^{t-1})} \quad (2.22)$$

Unter der Gültigkeit der Nullhypothese nehmen alle  $VR(q)$ -Statistiken den Wert eins für alle  $q$  an. Nimmt die Varianz im Gegensatz zum Random Walk unterproportional im Zeitverlauf zu, d.h. die  $q$ -Periodenvarianz ist kleiner als die  $q$ -fache Varianz der Einheitsperiode, deutet dies auf das Auftreten von Mean Reverting hin. In diesem Fall nehmen die  $VR(q)$ -Statistiken einen Wert kleiner als eins an. Andererseits ist eine überproportionale Zunahme der Varianz ein Zeichen für positive Autokorrelation<sup>14</sup>. Für die Implementierung des Tests benötigt man folgende Schätzer. Seien  $y_j^0, \dots, y_j^{T-1}$   $T$  logarithmierte Zinsbeobachtungen pro Laufzeit  $j$ . Man unterscheidet zwischen *nichtüberlappender* ( $\delta$ ) und *überlappender* ( $\Delta$ )  $q$ -Perioden-Änderungen. Es gilt:

$$\delta_j^{t,q} = y_j^{tq} - y_j^{(t-1)q} \quad (2.23)$$

$$\Delta_j^{t,q} = y_j^t - y_j^{t-q} \quad (2.24)$$

Des Weiteren sei  $\tau = \lfloor \frac{T-1}{q} \rfloor$ <sup>15</sup> die Anzahl nichtüberlappender Zinsänderungen. Für die Mittelwerte gilt:

$$\langle \delta \rangle_j^q = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \delta_j^{t,q} \quad (2.25)$$

$$\langle \Delta \rangle_j^q = \frac{1}{T-q} \sum_{t=q}^{T-1} \Delta_j^{t,q} \quad (2.26)$$

<sup>14</sup>vgl.[Reb05] S. 41

<sup>15</sup> $\lfloor x \rfloor$  rundet eine reelle Zahl  $x$  auf die nächstkleinere ganze Zahl ab. Z.B.  $\lfloor 2,8 \rfloor = 2$

woraus die Varianzen wie folgt berechnet werden:

$$var_j^q = \frac{1}{\tau - 1} \sum_{t=1}^{\tau} (\delta_j^{t,q} - \langle \delta \rangle_j^q)^2 \quad (2.27)$$

$$Var_j^q = \frac{1}{T - q - 1} \sum_{t=q}^{T-1} (\Delta_j^{t,q} - \langle \Delta \rangle_j^q)^2 \quad (2.28)$$

Die obigen Schätzer führen zur Varianz-Ratio-Statistik aus Gleichung (2.22)<sup>16</sup>

$$VR(q) = \frac{Var_j^q}{q \cdot var_j^1} \quad (2.29)$$

Die standardnormalverteilte Teststatistik zur Nullhypothese  $H_0$  lautet

$$z(q) = \frac{VR(q) - 1}{\frac{2(2q-1)(q-1)}{3q(T-1)}}. \quad (2.30)$$

Die Tabelle 2.7 präsentiert die geschätzten VR-Statistiken für die Zinssätze 1d, 3m, 6m, 12m, 2y, 5y, 10y, 30y des Zeitraumes von Januar 1999 bis Juli 2008. Der VR-Test wird mit den Änderungsperioden  $q$  von 2, 4, 6, 8, 16 und 32 durchgeführt. Auf dem Signifikanzniveau von 5%<sup>17</sup> wird die Nullhypothese bei den Zinssätzen mit den Laufzeiten 1d, 3m, 6m, 12m, 2y, 20y, 30y abgelehnt.<sup>18</sup> Das bedeutet, es existiert eine signifikante Abweichung vom Random-Walk-Verhalten. Bei den Zinssätzen mit der Laufzeit 5y und 10y ist keine signifikante Abweichung zu beobachten. Da bei den Zinssätzen 1d, 20y und 30y VR-Statistiken kleiner eins auftreten, liegt in diesen Fällen ein Mean Reverting Verhalten vor. Sind die VR-Statistiken signifikant größer eins, ist dies ein Zeichen für positive Autokorrelation.

In Abbildung A.1 (oben) im Anhang folgt die grafische Auswertung. Es werden die Varianzen der nichtüberlappenden  $q$ -Tagesänderungen betrachtet. Die Gerade in den Diagrammen stellt den linearen Verlauf der Varianz der Eintagesänderung ( $q=1$ ) dar. Je länger die  $q$ -Tagesperioden werden, desto größer wird der Schätzfehler. Bei 2481 Datenpunkten bleiben bei nichtüberlappenden 50-Tagesänderungen lediglich 50 Datenpunkte übrig. Trotzdem ist eine Abweichung vom linearen Verhalten der Eintagesvarianz deutlich zu beobachten und veranschaulicht nochmal die Auswertungen in Tabelle 2.7. Die Varianz des Eintageszinses sowie die Varian-

<sup>16</sup>Eine Verbesserung des VR-Tests durch Verwendung überlappender  $q$ -Periodenänderungen wurde von Richardson und Smith (1991) S. 246 nachgewiesen.

<sup>17</sup>Falls  $-z_{crit}^{97,5\%} = -1,96 \leq z \leq z_{crit}^{97,5\%} = 1,96$  wird  $H_0$  nicht abgelehnt

<sup>18</sup>Die Random-Walk-Hypothese impliziert für alle Änderungsperioden  $q > 2$  eine VR-Statistik von eins. Deshalb ist bereits eine signifikant von eins verschiedene Teststatistik hinreichend, um  $H_0$  zu verwerfen.

q	1d	3m	6m	12m	2y	5y	10y	20y	30y
<b>2</b>	<b>0,83</b>	<b>1,20</b>	<b>1,17</b>	<b>1,09</b>	<b>1,06</b>	<b>0,98</b>	<b>0,97</b>	<b>0,96</b>	<b>0,96</b>
z(q)	-8,29	9,71	8,60	4,50	3,06	-1,24	-1,49	-2,23	-2,04
<b>4</b>	<b>0,56</b>	<b>1,52</b>	<b>1,43</b>	<b>1,19</b>	<b>1,09</b>	<b>0,96</b>	<b>0,94</b>	<b>0,90</b>	<b>0,91</b>
z(q)	-11,69	13,85	11,44	4,93	2,37	-0,98	-1,47	-2,55	-2,51
<b>6</b>	<b>0,42</b>	<b>1,77</b>	<b>1,60</b>	<b>1,25</b>	<b>1,11</b>	<b>0,96</b>	<b>0,93</b>	<b>0,87</b>	<b>0,87</b>
z(q)	-11,66	15,54	12,13	4,95	2,16	-0,77	-1,38	-2,62	-2,71
<b>8</b>	<b>0,34</b>	<b>1,97</b>	<b>1,76</b>	<b>1,31</b>	<b>1,11</b>	<b>0,96</b>	<b>0,93</b>	<b>0,85</b>	<b>0,84</b>
z(q)	-11,14	16,41	12,77	5,15	1,87	-0,74	-1,24	-2,50	-2,66
<b>10</b>	<b>0,28</b>	<b>2,15</b>	<b>1,91</b>	<b>1,37</b>	<b>1,14</b>	<b>0,97</b>	<b>0,93</b>	<b>0,85</b>	<b>0,83</b>
z(q)	-10,58	16,92	13,38	5,48	2,11	-0,42	-0,99	-2,25	-2,45
<b>16</b>	<b>0,20</b>	<b>2,63</b>	<b>2,29</b>	<b>1,51</b>	<b>1,18</b>	<b>1,00</b>	<b>0,95</b>	<b>0,84</b>	<b>0,81</b>
z(q)	-9,07	18,45	14,59	5,78	2,07	-0,03	-0,61	-1,85	-2,12
<b>32</b>	<b>0,13</b>	<b>3,54</b>	<b>3,11</b>	<b>1,88</b>	<b>1,39</b>	<b>1,16</b>	<b>1,08</b>	<b>0,91</b>	<b>0,87</b>
z(q)	-6,78	19,83	16,44	6,85	3,06	1,21	0,60	-0,68	-1,01
<b>50</b>	<b>0,12</b>	<b>4,27</b>	<b>3,82</b>	<b>2,20</b>	<b>1,50</b>	<b>1,19</b>	<b>1,08</b>	<b>0,89</b>	<b>0,84</b>
z(q)	-5,47	20,23	17,43	7,43	3,10	1,18	0,50	-0,67	-0,98

**Tabelle 2.7:** Varianz-Ratio-Statistiken VR(q) für die Periode Januar 1999 bis Juli 2008

zen des 20y und 30y Zinses wachsen weniger als linear. Nach den obigen Überlegungen und Ergebnissen deutet dies auf ein *Mean Reverting Verhalten* hin. Bei den Zinssätzen ab drei Monaten bis zwei Jahren ist ein überproportionaler Anstieg der Varianz zu beobachten. Die ist ein Zeichen für *positive Autokorrelation*. Die Lag-1 Autokorrelationen der nichtüberlappenden q-Tagesänderungen werden mittels der Formel

$$\rho_j^1(q) = \frac{1}{T-2} \sum_{t=1}^{T-1} (\delta_j^{t,q} - \langle \delta \rangle_j^q) (\delta_j^{t+1,q} - \langle \delta \rangle_j^q) \quad (2.31)$$

berechnet und in Abbildung A.1 (unten) dargestellt. Zunächst einmal ist eine starke Autokorrelation zu beobachten, die selbst bei den Werten der 50-Tagesänderungen deutlich von null verschieden ist. Sie steigen bis auf wenige Ausnahmen mit wachsendem q an. Bei den Zinsen mit den am stärksten überlinear ansteigenden Varianzen sind die Autokorrelationen am größten. Die Zinsen mit unterlinear wachsenden Varianzen besitzen negative Autokorrelationen. Mit Ausnahme des Eintageszinses könnte man den Übergang zwischen einer überlinear hin zur unterlinear ansteigen-



den Varianz durch eine Mean Reverting-Komponente erklären, deren Stärke mit zunehmender Laufzeit ansteigt. Ökonomisch lässt sich die positive Autokorrelation anhand des Zinssteuerungsmechanismus der Zentralbanken erklären. In einem Zyklus steigender (fallender) Leitzinsen ist es wahrscheinlich, dass z.B. eine steigende (fallende) 30-Tagesänderung im nächsten Schritt wieder steigend (fallend) ausfällt. Diesen Effekt spiegeln die Zinsstrukturkurven der Forward Rates wieder. Sie verharren über einen längeren Zeitraum mit einer positiven bzw. negativen Steigung.

### Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Die Hauptkomponentenanalyse (engl. Principle Component Analysis, kurz: PCA) ist ein häufig eingesetztes Verfahren, um die Bewegungen der Zinsstrukturkurve zu untersuchen. Wie man in Tabelle 2.6 deutlich sehen kann, sind die Zinssätze unterschiedlicher Laufzeiten stark miteinander korreliert. Wären sie perfekt korreliert, würden die Zinsstrukturkurven nur Parallelverschiebungen aufweisen. In der Realität gibt es häufig Bewegungen, die von einer Parallelverschiebung abweichen und zu unterschiedlichen Formen der Zinsstrukturkurve führen, wie in Abschnitt 2.4 dargestellt wurde. Tendenziell bewegen sich die Zinssätze in die gleiche Richtung, was dazu führt, dass die Bewegung *eines* Zinssatzes eine Fülle an Informationen über die Bewegung eines *anderen* liefert. Mittels der Hauptkomponentenanalyse versucht man nun, die große Anzahl an Informationen der Daten zu einer kleinen Menge an linear unabhängigen (unkorrelierten) Faktoren zu reduzieren, die die Gesamtdynamik der Zinsstrukturkurve bei möglichst geringem Informationsverlust beschreibt. Wenn man in diesem Fall von Informationen spricht, handelt es sich um die Variabilität der Daten, die über die Varianz repräsentiert wird. Die durch eine Transformation erhaltenen neuen Daten (Hauptkomponenten) sind unkorreliert und nur wenige Hauptkomponenten beinhalten die gesamte Variabilität der Originaldaten. Die Transformation ist eine lineare Operation und lässt sich wie folgt beschreiben.

Sei  $X' = (X_1, \dots, X_N)^{19}$  ein Vektor mit  $N$  Zufallsvariablen<sup>20</sup>, wobei für jede Zufallsvariable  $X_j(t)$   $j = 1, \dots, N$   $t = 1, \dots, T$  eine eigene Zeitreihe vorliegt. In den späteren Analysen wird  $X$  durch die Matrix der Zinsänderungen repräsentiert. Des Weiteren sei  $\alpha$  eine  $N \times N$  dimensionale Transformationsmatrix mit den Zeilenvektoren  $\alpha'_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jN})$ ,  $j = 1, \dots, N$  und man fordert  $\alpha'_j \alpha_j = 1$ .

<sup>19</sup>  $X'$  bedeutet  $X$  transponiert

<sup>20</sup> zentriert oder standardisiert

**Schritt 1:** Man sucht eine lineare Funktion  $z_1 = \alpha'_1 X$  aus den Elementen von  $X$ , sodass die maximale Varianz erhalten bleibt.

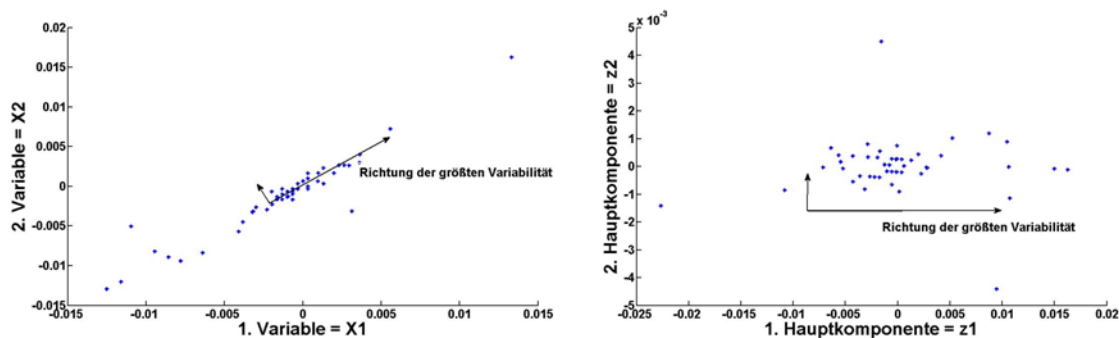
$$z_1 = \alpha'_1 X = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \dots + \alpha_{1N}X_N = \sum_{j=1}^N \alpha_{1j}X_j$$

**Schritt 2:** Man sucht erneut eine lineare Funktion  $z_2 = \alpha'_2 X$  von  $X$ , sodass die maximale Varianz erhalten bleibt, aber zusätzlich  $z_2$  und  $z_1$  unkorreliert sind.

⋮

**Schritt j:** Im j-ten Schritt sucht man eine lineare Funktion  $z_j = \alpha'_j X$  von  $X$  mit maximaler Varianz und  $z_j$  soll mit  $z_1, z_2, \dots, z_{j-1}$  unkorreliert sein.

$z_j \in \mathbb{R}^{T \times 1}$  bezeichnet man als j-te **Hauptkomponente** und deren Einträge als Scores. Insgesamt werden  $N$  Hauptkomponenten berechnet, allerdings „sammelt“ sich der größte Teil der Varianz von  $X$  in den ersten Hauptkomponenten. Die Vektoren  $\alpha'_j$  bezeichnet man als **Hauptachsen** oder **Faktoren** und deren Einträge als **Ladungen** oder **Sensitivitäten**. In Abbildung 2.11 ist ein Beispiel für den



**Abbildung 2.11:** Links: Plot von 50 Beobachtungen zweier Variablen; Rechts: Plot der 50 Beobachtungen transformiert in die Hauptkomponenten

Fall mit zwei stark korrelierten Variablen  $X_1$  und  $X_2$  zu sehen. Die Varianzen der beiden Variablen betragen  $Var(X_1) = 2,01 \times 10^{-5}$  und  $Var(X_2) = 2,24 \times 10^{-5}$ . Nach der Transformation in die Hauptkomponenten muss per Konstruktion die Variable  $z_1$  den größten Teil der Varianz beinhalten. Es folgt für die Varianzen der Hauptkomponenten  $Var(z_1) = 4,31 \times 10^{-5}$  und  $Var(z_2) = 1,11 \times 10^{-6}$ . Für mehr als zwei Variablen fällt der Anteil der Varianz in den höheren Hauptkomponenten sehr schnell ab.

Wie berechnet man nun die Hauptkomponenten? Eine detaillierte Herleitung ist in Jolliffe (1986) zu finden. Die Grundidee ist eine orthogonale Zerlegung der

Varianz-Kovarianz-Matrix  $\Sigma$ , um die Varianzen zu entkoppeln und damit die Daten in eine neue Basis bezüglich der gewünschten Eigenschaften zu transformieren. Es stellt sich heraus, dass für  $j = 1, \dots, N$  die  $j$ -te Hauptkomponente durch  $z_j = \alpha'_j X$  gegeben ist, wobei  $\alpha_j$  den Eigenvektor von  $\Sigma$  darstellt, der zum  $j$ -größten Eigenwert  $\lambda_j$  gehört. Ferner gilt aufgrund der normierten Eigenvektoren:  $Var(z_j) = \lambda_j$ . Alle Hauptkomponenten bzw. Eigenvektoren stehen orthogonal aufeinander.

Im Folgenden werden drei Hauptkomponentenanalysen der EURIBOR Zinskurven erstellt. Als erstes wird die Analyse mit den vollständigen Daten aus 2.5.1 durchgeführt. Zum Vergleich werden im Anschluss nur die Zinskurven des Geldmarktes (1d bis 12m) und des Swapmarkts (2y bis 30y) untersucht. Als Datenmatrix  $X$  werden die standardisierten Tagesänderungen  $\Delta Y$  der Zinsen verwendet

$$\Delta Y = (\Delta Y_{tj})_{\substack{1 \leq t \leq 2480 \\ 1 \leq j \leq x}} = \left( \frac{\Delta y_j^t - \overline{\Delta y_j}}{\sigma_{\Delta y_j}} \right)_{\substack{1 \leq t \leq 2480 \\ 1 \leq j \leq x}}$$

mit  $x = 19$  für die gesamte Zinsstrukturkurve,  $x = 13$  für den Swapmarkt und  $x = 6$  für den Geldmarkt.

Die Verwendung der standardisierten Werte führt dazu, dass die PCA nicht mit der Varianz-Kovarianz-Matrix, sondern mit der Korrelationsmatrix in Tabelle 2.6 durchgeführt wird<sup>21</sup>. Ein Grund für dieses Vorgehen ist der große Unterschied zwischen den Varianzen der einzelnen Zinssätze, wie in Tabelle 2.5 zu sehen ist. Der Eintageszinssatz besitzt eine wesentlich höhere Varianz als die anderen und würde deshalb die ersten Hauptkomponenten zu stark beeinflussen, was durch das Standardisieren verhindert wird.

Die Anteile der Varianzen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und  $\lambda_4$  der ersten vier Hauptkomponenten  $z_1, z_2, z_3, z_4$  an der Gesamtvarianz sind<sup>22</sup>:

Gesamt:

$$\frac{\lambda_1}{\sum_{j=1}^{19} \lambda_j} = 63,1\% , \quad \frac{\lambda_2}{\sum_{j=1}^{19} \lambda_j} = 19,3\% , \quad \frac{\lambda_3}{\sum_{j=1}^{19} \lambda_j} = 5,5\% , \quad \frac{\lambda_4}{\sum_{j=1}^{19} \lambda_j} = 4,6\%$$

Geldmarkt:

$$\frac{\lambda_1}{\sum_{j=1}^6 \lambda_j} = 61,8\% , \quad \frac{\lambda_2}{\sum_{j=1}^6 \lambda_j} = 17,2\% , \quad \frac{\lambda_3}{\sum_{j=1}^6 \lambda_j} = 14,1\% , \quad \frac{\lambda_4}{\sum_{j=1}^6 \lambda_j} = 5,6\%$$

<sup>21</sup>vgl. [Jol86] S.21 ff

<sup>22</sup>Eine Auflistung verschiedener Resultate mit anderen Datensätzen findet man in [Mar03] S. 75.

Swapmarkt:

$$\frac{\lambda_1}{\sum_{j=1}^{13} \lambda_j} = 90,8\% \quad , \quad \frac{\lambda_2}{\sum_{j=1}^{13} \lambda_j} = 6,0\% \quad , \quad \frac{\lambda_3}{\sum_{j=1}^{13} \lambda_j} = 1,1\% \quad , \quad \frac{\lambda_4}{\sum_{j=1}^{13} \lambda_j} = 0,7\%$$

Die Varianzen höherer Hauptkomponenten verschwinden fast vollständig bzw. liegen unter 1%. Dieses Ergebnis ist eine gute Motivation, die Dynamik der Zinsstruktur in einigen wenigen Variablen zu beschreiben, wie es bei vielen Zinsstrukturmodellen der Fall ist. In der Abbildung A.2 im Anhang sind neben den Eigenwerten die ersten drei Eigenvektoren bzw. Faktoren mit ihren Ladungen dargestellt.

Der erste Geldmarkt-Faktor  $\alpha_1$  gewichtet die Zinsen aller Laufzeiten positiv und mit dem Fortschreiten der Laufzeit leicht steigend, wohingegen bei dem ersten Swapmarkt-Faktor die Zinsen aller Laufzeiten annähernd gleich gewichtet werden. Der erste Faktor der gesamten Zinskurve ist eine Kombination der anderen beiden, jedoch mit einem steilen Anstieg des Ladungswertes vom Ein- zum Zweijahreszins. Wegen der Normierung der Eigenvektoren kann die erste Hauptkomponente  $z_1$  als mittleres Zinsniveau interpretiert werden, d.h. die Schwankungen der zu diesem Eigenvektor gehörenden Hauptkomponente  $z_1$  bilden die **Parallelverschiebungen** der Zinsstrukturkurve ab.

Die Ladungen des zweiten Geldmarkt-Faktors  $\alpha_2$  sind mit steigender Laufzeit fallend und wechseln beim 6m Zins ihr Vorzeichen. Genau umgekehrt verhalten sich die Ladungen des zweiten Swapmarkt-Faktors. Sie starten negativ und steigen mit zunehmender Laufzeit an, bis sie beim 7y Zins positiv werden. Die Ladungen des zweiten Faktors der gesamten Zinskurve starten im positiven Bereich und werden ab dem 4y Zins negativ. Eine fallende Tendenz ist erst ab dem 9m Zins zu beobachten. Das entscheidende ist der Vorzeichenwechsel, der bei allen zweiten Faktoren vorkommt. Betrachtet man eine Rücktransformation der Hauptkomponenten auf die ursprünglichen Zinsvektoren  $X$ , so wird klar, dass durch die Addition der zweiten Hauptkomponente  $z_2$  zur ersten  $z_1$  das mittlere Zinsniveau um eine mittlere Steigung korrigiert wird. Eine Änderung der zweiten Hauptkomponente ändert also die **Steigung** der Zinsstrukturkurve und bewirkt somit eine Drehung der Kurve.

Die Ladungen des dritten Faktors  $\alpha_3$  sind in allen drei Fällen gleich und gewichten die Zinsen mit kurzer und mit langer Laufzeit negativ, wohingegen Zinsen mit mittlerer Laufzeit negativ gewichtet werden. Dadurch ändert sich bei Addition der dritten Hauptkomponente  $z_3$  zu den ersten beiden die **mittlere Krümmung** der Zinsstrukturkurve<sup>23</sup>.

Diese Bewegungsszenarien der Zinsstrukturkurve, die durch die ersten drei Haupt-

<sup>23</sup>vgl.[Deu04] S.623

komponenten beschrieben werden, entsprechen tatsächlich den bereits in Abschnitt 2.4 erwähnten subjektiv beobachteten Szenarien (Parallel-Shift, Twist und Hump). Die unterschiedlichen Anteile der Varianz an den Hauptkomponenten der untersuchten Zinskurven besagen, dass die Swapmarktkurven hauptsächlich Parallelbewegungen durchführen und bei den Geldmarktkurven die Parallelbewegungen zwar dominieren, aber Drehungs- und Krümmungsänderungen eine deutlich höhere Rolle spielen als im Swapmarkt.

## 2.6 Zinsderivate

Bislang wurden Bonds und Swaps betrachtet. Diese Zinsinstrumente zeichnen sich dadurch aus, dass sie eine sichere Auszahlung besitzen und der Preis über das Abdiskontieren der Cash Flows bestimmt werden kann. Die in diesem Abschnitt betrachteten Zinsinstrumente sind Derivate. Bei diesen Instrumenten sind die Auszahlungen unsicher, d.h. man benötigt zu deren Bewertung ein Modell, welches die möglichen Auszahlungen modelliert. Im Folgenden werden die wichtigsten Zinsderivate kurz vorgestellt<sup>24</sup>.

### BOND OPTION

Eine Bond Option ist eine Option für den Kauf (Call) oder Verkauf (Put) eines Bonds zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt für einen vorher festgelegten Preis. Der Inhaber hat das Recht, aber nicht die Pflicht, die Option auszuüben. Dabei unterscheidet man zwischen europäischen und amerikanischen Optionen. Eine europäische Option kann nur am Ende der Laufzeit ausgeübt werden, wohingegen eine amerikanische Option jederzeit ausgeübt werden darf.

### ZINSCAPS UND ZINSFLOORS

Der Zinscap stellt eine Vereinbarung für eine Zinsobergrenze dar. Angenommen man betrachtet einen Bond mit einer variablen Verzinsung, dessen Zinssatz regelmäßig an den EURIBOR angepasst wird. Die Zeit zwischen den Zinsanpassungen nennt man *Tenor* und beträgt häufig drei Monate. Für die ersten drei Monate entspricht der Zins dem aktuellen 3m EURIBOR und nach drei Monaten wird der dann vorherrschende 3m Zins für die nächste Periode gezahlt usw. Der Zinscap stellt nun eine Absicherung gegen einen Anstieg des Zinssatzes der Anleihe über ein bestimmtes Niveau dar. Umgekehrt sichert man sich mit einem Zinsfloor gegen das Fallen der variablen Zinsen unter ein bestimmtes Niveau ab.

---

<sup>24</sup>vgl. [Hul06]

## SWAPTIONS

Eine Swaption ist eine Option auf einen Zinsswap. Der Käufer hat das Recht, zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt in einen Zinsswap einzutreten.

Um diese Produkte zu bewerten, benötigt man bestimmte Zinsmodelle. Einen Überblick über die bekannten arbitargefreien Pricingmodelle, die im risikoneutralen Maß arbeiten, werden im Kapitel 4.1 vorgestellt.

# 3 Reale vs. risikoneutrale Welt

## am Beispiel des Binomialmodells

### 3.1 Einleitung

Im folgenden Kapitel soll am Beispiel des Binomialmodells der Unterschied zwischen der realen und der risikoneutralen Welt erläutert werden<sup>1</sup>. Das (einperiodige) Binomialmodell bietet auf Grund seiner Einfachheit den großen Vorteil, sich auf die wesentlichen Punkte zu beschränken. Es wird die Verteilung zukünftiger Aktienkurse und die Preisfindung von Call Optionen untersucht. Dabei wird zwischen der realen Underlying-Verteilung  $P$  und der bewertungsrelevanten risikoneutralen Verteilung  $Q$  unterschieden. Um die Beziehungen dieser beiden Verteilungen zu verstehen, wird noch eine real-risikoneutrale Welt betrachtet, mit deren Hilfe man die Risikoprämien ableiten kann. Da sich nicht nur der Erwartungswert, sondern auch die Standardabweichung der beiden Verteilungen unterscheidet, muss bei Risikomanagement-Anwendungen genau darauf geachtet werden, mit welcher Verteilung gearbeitet wird.

### 3.2 Allgemeine Annahmen

#### DISKRETE WERTE

Seien  $S_0 = 100$  und  $S_T$  die Aktienkurse zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $t = T$  mit dem Erwartungswert  $E_P(S_T) = 115$  und der Standardabweichung  $SD_P(S_T) = 50$ . Dann ist  $L_S = \frac{S_T}{S_0} = 1,15$  die diskrete Rendite zwischen  $t$  und  $T$ , d.h. es wird eine Rendite von 15% erwartet. Analog dazu sei  $L_f = 1,03$  die diskrete risikolose Rendite (3%) zwischen  $t$  und  $T$ .

#### STETIGE WERTE

Der Erwartungswert berechnet sich mit der stetigen Wachstumsrate  $\mu$  über

$$E_P(S_T) = S_0 \exp(\mu T) = 115. \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>vgl. dazu [Wil01]

Daraus folgt  $\mu = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{E_P(S_T)}{S_0} \right) = 13,98\%$ . Der stetige risikolose Zins beträgt  $R_f = \ln(L_f) = 2,96\%$ .

### 3.3 Aktienkursverlauf

Beim einperiodigen Binomialmodell kann der Aktienkurs  $S_T$  zum zukünftigen Zeitpunkt  $T$  nur zwei Ausprägungen annehmen. Entweder  $uS_0$  oder  $dS_0$  mit einem up-Faktor  $u > 1$  und einem down-Faktor  $d < 1$ , wobei beide Zustände mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  bzw.  $1 - p$  erreicht werden. Man kann annehmen, dass  $d < \exp(R_f T) < u$ , da sonst die risikofreie Anlage die Aktie stets dominieren würde oder umgekehrt und somit Arbitrage möglich wäre. Man spricht deshalb auch von einem *No-Arbitrage Modell*. Die reale Verteilung  $P$  des Aktienkurses zum Zeitpunkt  $T$  ist somit durch die Punktverteilung auf  $uS_0$  und  $dS_0$  gegeben. Es müssen jetzt drei Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  bestimmt werden, von denen  $d = \frac{1}{u}$  gesetzt werden kann<sup>2</sup>.

#### REALE WELT

Die Wahrscheinlichkeit  $p$  und der Faktor  $u$  werden so gewählt, dass der Erwartungswert und die Standardabweichung des Aktienkurses mit den oben angegebenen Werten übereinstimmen, d.h.:

$$\begin{aligned} E_P(S_T) &= (puS_0 + (1-p)d)S_0 = 115 \\ SD_P(S_T) &= \sqrt{p(1-p)(u-d)^2 S_0^2} = 50 \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen errechnet sich  $u = 1,6195$  und  $p = 53,15\%$ . Somit ist die reale Verteilung  $P$  des Aktienkurses in dem Beispiel eindeutig bestimmt.

#### RISIKONEUTRALE WELT

Zur arbitragefreien Bewertung von Derivaten wird die reale Verteilung  $P$  des Underlyings nicht benötigt. Man wechselt hingegen in eine (künstliche) risikoneutrale Welt, in der die Investoren sich lediglich an dem Erwartungswert einer Zahlung orientieren. Stimmen die Erwartungswerte einer risikobehafteten und einer risikolosen Investition überein, so ist der Investor indifferent zwischen den beiden Investitionen, d.h. er zahlt für beide den selben Preis. Jede Investition bringt also den risikolosen Zins  $R_f$  ein. Geht man davon aus, dass in der realen Welt die meisten Investoren risikoavers sind, so entscheiden sie sich bei Investitionen mit dem gleichen Erwartungswert für diejenige mit dem geringsten Risiko. Damit überhaupt ein

---

<sup>2</sup>vgl.[Cox79]



Risiko eingegangen wird, muss dem Investor eine sogenannte Risikoprämie (RP) gezahlt werden. In der risikoneutralen Welt muss demnach der heutige Kurs  $S_0$  unter der Annahme der Risikoneutralität erklärt werden, d.h. er muss gleich dem risikolos abgezinsten Erwartungswert entsprechen. Unter der neuen Verteilung  $Q$  gilt:

$$S_0 = \exp(-R_f T) E_Q(S_T) = \exp(-R_f T)(qu + (1 - q)d)S_0, \quad (3.2)$$

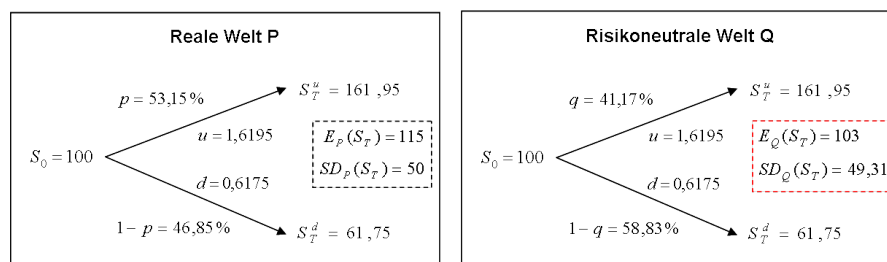
wobei  $E_Q$  der Erwartungswert bezüglich der künstlichen Verteilung  $Q$  ist. Als einzige Lösung für  $q$  folgt:

$$q = \frac{\exp(R_f T) - d}{u - d} \quad (3.3)$$

Der *normierte* Preis der Aktie ist unter  $Q$  somit ein Martingal und man spricht deshalb von einem Martingalmaß  $Q$ . Normiert bedeutet in diesem Fall, dass der Aktienkurs durch das *Numeraire*<sup>3</sup>  $\exp(-R_f T) = B(0, T)$  (Zero Bond) geteilt wird. Es gilt:

$$\frac{S_0}{B(0, T)} = E_Q \left( \underbrace{\frac{S_T}{B(T, T)}}_{=1} \right)$$

Wie in 3.4.2 gezeigt wird, ist nun auch unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  der normierte Preis eines Calls ein Martingal. Mit den beiden Underlying-Verteilungen  $P$  und  $Q$  können jetzt Derivate berechnet werden, wobei die Verwendung der risikoneutralen Verteilung  $Q$  die gängigste Methode darstellt. Die meisten finanzmathematischen Modelle zur Bewertung von Derivaten sind unter einem risikoneutralen Maß  $Q$  aufgestellt. In Abbildung 3.1 sind die Verteilungen in der realen sowie in der risikoneutralen Welt dargestellt.



**Abbildung 3.1:** Aktienkursverlauf mit Verteilungen in der realen und risikoneutralen Welt

<sup>3</sup>Die Normierung wird in der Finanzmathematik meist mit dem Wort Numeraire bezeichnet.

## 3.4 Aktienoptionen

Im Folgenden wird eine europäische Option mit  $c$  mit der Laufzeit (Fälligkeit)  $T = 1$  betrachtet, deren Auszahlung  $\max(S_T - X, 0)$  nur vom Aktienkurs zum Zeitpunkt  $T$  abhängt. Der Ausübungspreis beträgt  $X = 110$ . Um der Calloption zum Zeitpunkt  $t = 0$  einen Wert zuzuordnen, werden drei Methoden vorgestellt. Zuerst wird das Pricing unter der realen Wahrscheinlichkeitsverteilung des Underlyings betrachtet und anschließend die übliche Variante des abdiskontierten Erwartungswerts unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsverteilung  $Q$  vorgestellt.

### 3.4.1 Reale Welt

Um mit der realen Wahrscheinlichkeitsverteilung die Option zu bewerten, gibt es zwei Herangehensweisen. Es besteht die Möglichkeit, ein Duplikationsportfolio aufzustellen, oder über den realen Erwartungswert die Option zu bewerten.

#### Bewertung über ein Duplikationsportfolio

Es seien  $c_T^u$  und  $c_T^d$  die beiden möglichen Werte der Option bei Fälligkeit, d.h.  $c_T^u = \max(uS_0 - X, 0)$  und  $c_T^d = \max(dS_0 - X, 0)$ . Die Bewertung erfolgt nun über ein Duplikationsportfolio, das aus  $\Delta$  Aktien und einem Zero Bond (dem Numeraire) mit dem Nominal ZB besteht. Die Anteile werden so gewählt, dass das Portfolio zum Fälligkeitszeitpunkt immer den gleichen Wert wie die Option besitzt, d.h.  $c_T = \Delta S_T + ZB$ . Eine Investition in das Portfolio ist das gleiche wie eine Investition in die Option, sodass die Werte der beiden Investitionen, aus Gründen der Arbitragefreiheit, identisch sein müssen. Da es im einfachen Binomialmodell nur zwei mögliche Zustände des Aktienkurses in  $T$  gibt, wird die Lösung des Gleichungssystems

$$c_T^u = \Delta uS_0 + ZB \quad (3.4)$$

$$c_T^d = \Delta dS_0 + ZB \quad (3.5)$$

gesucht. Man erhält  $\Delta = \frac{c_T^u - c_T^d}{(u-d)S_0}$  und  $ZB = \frac{c_T^d u - c_T^u d}{u-d}$ . Der heutige Wert der Aktie beträgt  $S_0$  und der heutige Wert des Zero Bonds ist  $\exp(-R_f T)ZB$ . Daraus folgt für den heutigen, arbitragefreien Wert der Option:

$$c_0 = \Delta S_0 + \exp(-R_f T)ZB = \Delta S_0 + \exp(-R_f T) \frac{c_T^d u - c_T^u d}{u - d}. \quad (3.6)$$

Das Ergebnis ist in Abbildung A.3 im Anhang (oben) dargestellt. Es ist bemerkenswert, dass die realen Eintrittswahrscheinlichkeiten des Aktienkurses nicht in der Formel vertreten sind und somit auch nicht den Optionswert beeinflussen. Der reale Erwartungswert des Aktienkurses hat somit keinen Einfluss auf den Optionspreis. Im Anfangsbeispiel spielten die realen (subjektiven) Gewinnwahrscheinlichkeiten für die Wettquoten auch keine Rolle. Die Quoten wurde so gewählt, dass der Buchmacher unabhängig vom Spielausgang weder einen Gewinn noch einen Verlust erzielt. In Analogie dazu ist der Verkäufer der Option durch das Duplikationsportfolio ebenfalls perfekt abgesichert, egal zu welchem „Spielausgang“ (Aktienkurs in T) es letztendlich kommen wird. Man spricht hier von einem *vollständigen Finanzmarkt*, da es möglich ist, jedes Derivat (jede Auszahlung zum Zeitpunkt T) durch Handeln mit der Aktie und dem Zero Bond zu replizieren. Der real erwartete Wert der Option zum Zeitpunkt T und seine Standardabweichung sind hingegen abhängig von der realen Verteilung des Underlyings:

$$E_P(c_T) = pc_T^u + (1 - p)c_T^d$$

$$SD_P(c_T) = \sqrt{p(1 - p)} |c_T^u - c_T^d|.$$

Für einen Investor sind diese Größen entscheidend, um Ertrag und Risiko abschätzen zu können. Der Fußballfan im Anfangsbeispiel musste die realen Gewinnwahrscheinlichkeiten über Informationen wie Heimstärke, Tabellenplatz etc. ableiten. In einem komplexen Finanzmarkt ist es aber nicht ausreichend, sich als Investor auf ein paar subjektive Ausgangsszenarien zu verlassen<sup>4</sup>. Vielmehr benötigt er ein mathematisches Modell, welches nicht einzelne Szenarien, sondern komplette reale Ausgangsverteilungen modelliert. Das Ziel dieser Arbeit ist es ein solches Modell zu finden, welches die Zinsstrukturkurven möglichst exakt unter der beobachtbaren realen Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert. Damit ist es möglich, einem Investor Informationen über Ertrag und Risiko einer auf Zinsstrukturen basierenden Investition zu liefern.

### Risikoprämie

In der Abbildung A.3 (Mitte) wurde zusätzlich eine real-risikoneutrale Welt eingefügt. Sie wird deshalb reale Welt genannt, weil auch weiterhin die Wahrscheinlichkeitsverteilung P vorherrscht. Allerdings wird nun davon ausgegangen, dass sich alle Investoren risikoneutral verhalten. Das bedeutet, der Preis der Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist identisch dem Barwert eines Zero Bonds mit der Fälligkeit T.

<sup>4</sup>bzw. auf alleinige Research-Informationen

Um den Preis  $c_0$  zu berechnen, muss man lediglich den Erwartungswert unter P mit dem risikolosen Zins abdiskontieren:

$$c_0^* = \exp(-R_f T) E_P(c_T). \quad (3.7)$$

Diesen Preis würde ein risikoneutraler Investor für die Option zahlen. Die Differenz  $RP = c_0^* - c_0 = 6,04$  stellt also die Risikoprämie dar, die man an einen risikoaversen Investor zahlen muss, damit er die Option kauft. Die Risikoprämie kann auch als Zinsaufschlag  $rp$  definiert werden, d.h.  $c_0 = \exp(-(R_f + rp)T) E_P(c_T) = \exp(-R_f T) E_Q(c_T)$ .

### Real-risikoadjustierter-Erwartungswert

Im Folgenden wird der Optionspreis über die reale Underlying-Verteilung P berechnet<sup>5</sup>. In der real-risikoneutralen Welt wird der Erwartungswert  $E_P(c_T)$  mit dem risikolosen Zins abdiskontiert und man erhält damit einen Optionspreis  $c_T^*$  inkl. Risikoprämie. In der bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt hingegen wird der Erwartungswert unter Q risikolos abdiskontiert und man erhält den realen Preis der Option<sup>6</sup>. In der realen Welt müsste man, um auf den richtigen Preis zu kommen, den Erwartungswert unter P mit dem tatsächlichen Drift der Option abdiskontieren. Wie oben schon gezeigt wurde, besteht dieser risikoadjustierte Diskontfaktor aus der risikolosen Verzinsung plus einer Risikoprämie  $rp$ . Der risikoadjustierte Diskontfaktor ändert sich in jedem Zeitschritt, da bei steigenden Aktienkursen der Leverage-Effekt der Option sinkt und umgekehrt. Dieser Diskontfaktor ist also eine pfadabhängige Zufallsvariable, die an den Aktienkurs gekoppelt ist. Da der reale Aktiendrift  $\mu$  eine bekannte Variable ist, wird später die Preiselastizität  $\Omega = \frac{S\Delta}{c}$  als eine Art „Deflator“ eingesetzt, um die Risikoprämie  $rp$  zu substituieren.

Für den Erwartungswert unter P gilt:

$$\begin{aligned} c_0 E_P(L_c) &= E_P(c_T) \\ \Rightarrow c_0 [L_f + E_P(L_c) - L_f] &= E_P(c_T) \\ \Rightarrow c_0 &= \frac{E_P(c_T) - c_0 [E_P(L_c) - L_f]}{L_f}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$L_c$  ist die diskrete Callrendite  $\frac{c_T}{c_0}$  zwischen  $t$  und  $T$ . Man substituiert jetzt die

<sup>5</sup>vgl. [Arn03]

<sup>6</sup>Diese einfache Bewertungstechnik ist der Grund dafür, dass die meisten Bewertungsmodelle unter der risikoneutralen Verteilung Q aufgestellt sind.

Risikoprämie mit der Preiselastizität<sup>7</sup>

$$\Omega = \frac{S\Delta}{c} = \frac{S_0(c_T^u - c_T^d)}{c_0 S_0(u - d)} = \frac{(c_T^u - c_T^d)}{c_0(u - d)}, \quad (3.9)$$

wobei  $\Delta = \frac{(c_T^u - c_T^d)}{S_0(u - d)}$  ist. Es folgt aus (3.8):

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{E_P(c_T) - c_0\Omega[E_P(L_S) - L_f]}{L_f} \\ \Rightarrow c_0 &= \frac{E_P(c_T) - \frac{(c_T^u - c_T^d)}{(u - d)}[E_P(L_S) - L_f]}{L_f} \end{aligned} \quad (3.10)$$

der Optionspreis zum Zeitpunkt  $T = 0$ . Obwohl mit der risikolosen Zinsrate abdiskontiert wird, ist es kein risikoneutrales Bewerten der Option. Es findet kein Wechsel der Wahrscheinlichkeitsverteilungen statt. Der Erwartungswert  $E_P(c_T)$  wird nicht direkt mit dem risikolosen Zins abdiskontiert. Stattdessen wird ein risikoadjustierter Erwartungswert:  $E_P(c_T) - \text{Adjustierungsfaktor}$  verwendet. Man bildet also den realen Erwartungswert unter P minus einer Risikoprämie. Das Ergebnis ist ebenfalls in der Abbildung A.3 (oben) zu sehen. Die Optionspreise der beiden Berechnungsmethoden unterscheiden sich natürlich nicht. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass man die selben Szenarien für Pricing und Risikomanagement verwenden kann.

### 3.4.2 Risikoneutrale Welt

Wie bereits erwähnt, sind in der modernen Derivatebewertung die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bewertungsrelevant. *Der heutige Optionspreis ist gleich des risikolos abdiskontierten Erwartungswerts unter Q.* Dies lässt sich aus dubikationstheoretischer Sicht wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned} c_0 &= \exp(-R_f T) ZB + \Delta S_0 \\ &= \exp(-R_f T) [qZB + ZB - qZB] + \Delta S_0 \\ &= \exp(-R_f T) [qZB + (1 - q)ZB] + \Delta S_0 \\ &=^{(3.4)(3.5)} \exp(-R_f T) \left[ q(c_T^u - \Delta u S_0) + (1 - q)(c_T^d - \Delta d S_0) \right] + \Delta S_0 \\ &= \exp(-R_f T) \left[ q(c_T^u) + (1 - q)(c_T^d) \right] - \underbrace{\exp(-R_f T)(qu + (1 - q)d)}_{=^{(3.2)} 1} \Delta S_0 + \Delta S_0 \end{aligned}$$

<sup>7</sup> $\Omega = 2,5$ , d.h steigt die Differenz  $(c_T^u - c_T^d)$  um 2,5 Punkte an, reagiert der Callpreis mit einem Anstieg um einen Punkt.

$$\begin{aligned}
&= \exp(-R_f T)(q(c_T^u) + (1 - q)(c_T^d)) \\
&= \exp(-R_f T)E_Q(c_T)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Der duplikationstheoretisch begründete Optionswert ergibt sich also aus der Erwartungswertbildung einer geeignet adjustierten Verteilung  $Q$  (3.3). Unter  $Q$  ist der normierte Callpreis ebenfalls ein Martingal. In Abbildung A.3 (unten) sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten unter  $Q$  dargestellt. Der Erwartungswert und die Standardabweichungen der Option ändern sich deutlich.

### 3.5 Fazit: Reale vs. risikoneutrale Welt

In der Derivatebewertung existieren zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen des zugrundeliegenden Underlyings: Die reale Verteilung  $P$  und die risikoneutrale Verteilung  $Q$ . Mit beiden Verteilungen ist es möglich Optionen zu bewerten. Allerdings ist die gängigste Methode die Erwartungswertbildung unter  $Q$ . Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  hängt von der Wahl des Numeraires ab und ist durch die Forderung der Arbitragefreiheit eindeutig. Jedes beliebig handelbare Finanzinstrument kann die Funktion des Numeraires übernehmen. In dem obigen Beispiel ist das Numeraire ein Zero Bond und das dazugehörige risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß (3.3) ein Beispiel für ein Martingalmaß. Es gilt nämlich (3.11):

$$\frac{c_0}{B(0, T)} = E_Q \left( \frac{c_T}{B(T, T)} \right)$$

d.h., der normierte Preis zur Zeit  $t = 0$  ist gleich dem Erwartungswert (bzgl.  $Q$ ) des zukünftigen normierten Preises<sup>8</sup>. Anschaulich bedeutet dies, dass der Preis des Calls nicht in der Einheit der betreffenden Währung, z.B. Euro, sondern in Einheiten des Zero Bonds mit Fälligkeit  $T$  ausgedrückt wird. Man erfährt also wieviel Zero Bonds der Call kostet und nicht wieviel Euro.

Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern. Sei  $U_t$  der Preis eines beliebigen handelbaren Underlyings (z.B. einer Aktie) und  $V_t$  der Preis eines beliebigen handelbaren Finanzinstruments (z.B. eines Calls) und  $N_t$  ein beliebig handelbares Numeraire (z.B. ein Zero Bond). Dann existiert in einem vollständigen Finanzmarkt ein eindeutiges Martingalmaß  $Q_N$  unter diesem  $\frac{U_t}{N_t}$  ein Martingal ist<sup>9</sup> und es gilt:

$$\frac{V_t}{N_t} = E_{Q_N} \left( \frac{V_T}{N_T} \right)$$

<sup>8</sup>vgl. [Deu04] S. 206

<sup>9</sup>Das Martingalmaß wird über das Girsanov Theorem hergeleitet.

D.h., wenn der normierte Preis des Underlyings  $U_t$  (im Beispiel die Aktie  $S$  unter  $Q$  (3.3)) unter  $Q_N$  ein Martingal ist, sind auch die normierten Preise aller anderen handelbaren Finanzinstrumente  $V_t$  (im Beispiel die Call Option) Martingale (3.11). Der Erwartungswert der Rendite des Underlyings im Martingalmaß ist immer gleich der Rendite des Numerairs. Im Beispiel entspricht die erwartete Rendite der Aktie in der risikoneutralen Welt dem risikolosen Zins. Dieses Ergebnis ist, wie in 3.4.2 gezeigt, duplikationstheoretisch begründet. D.h., für jedes handelbare Finanzinstrument  $V_t$  lässt sich ein selbstfinanzierendes<sup>10</sup> Portfolio aus  $N_t$  und  $U_t$  aufbauen, das zur Fälligkeit  $T$  des Derivats das Auszahlungsprofil  $V(T)$  exakt repliziert<sup>11</sup>. Im Abschnitt Zinsmodelle fällt diese Bewertungstechnik unter den Begriff Martingalmethode und wird für ein zeitstetiges Modell näher erläutert. Wird in den weiteren Ausführungen von einem risikoneutralen Maß  $Q$  gesprochen, handelt es sich hierbei um das bewertungsrelevante Martingalmaß.

In der obigen Ausführung wurde noch eine dritte Welt betrachtet, die sogenannte real-risikoneutrale Welt. Hier geht man davon aus, dass alle Investoren risikoneutral sind und jedes Investment den Wert eines Zero Bonds besitzt. Somit ist es möglich die Risikoprämie herauszurechnen, die man normalerweise an einen risikoaversen Investor zahlen muss. In dem Beispiel der Call-Option ist die Risikoprämie positiv, d.h. der Käufer eines Calls erhält für den Ausgleich der übernommenen Unsicherheit der zukünftigen Auszahlung einen höheren Erwartungswert als mit einer risikofreien Anlage. Der Käufer eines Puts hingegen muss die Risikoprämie zahlen<sup>12</sup> und wird für die Übernahme von Risiken sozusagen bestraft. Der alleinige Kauf von Puts ist also nur etwas für risikofreudige Anleger. Im Portfoliokontext macht es aber durchaus Sinn Puts zu kaufen, da der Wert des Puts in der Regel negativ mit dem Portfolio korreliert und somit Risiko vernichtet wird. Um in diesem Fall genaue Risiko/Ertrags-Rechnungen über einen längeren Zeitraum durchführen zu können, muss man die reale Auszahlungsverteilung der Option kennen. Wie im obigen Beispiel gezeigt, gilt  $E_P(c_T) \neq E_Q(c_T)$  und  $SD_P(c_T) \neq SD_Q(c_T)$ . Dieses Ergebnis motiviert das Aufstellen von Modellen alternativ zu den klassischen Pricingmodellen unter  $Q$ , welche die realen Underlying-Verteilung möglichst gut modellieren können. Zum Bewerten der Finanzinstrumente wird auch weiterhin ein risikoneutrales Pricingmodell oder ein alternatives Verfahren, welches unter der realen Verteilung  $P$  arbeitet, benötigt.

<sup>10</sup>Eine Strategie ist genau dann selbstfinanzierend, wenn die gesamte Änderung des Portfolio-werts zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anpassungszeitpunkten alleine durch Marktänderungen (und nicht durch Positionsänderungen im Portfolio) erklärbar ist. vgl. [Deu04] S. 212

<sup>11</sup>vgl. [Deu04] S. 221

<sup>12</sup>vgl. [Wil01] S.35

# 4 Zinsmodelle

„...surprisingly little attention has been paid to the key practical problem of yield curve forecasting.“ Diebold and Lie (2006)

Ziel dieses Kapitels soll es sein, ein geeignetes Zinsmodell zu finden, welches die Zinsstrukturkurven unter der empirischen Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert. In den letzten 25 Jahren wurde eine Vielzahl von theoretischen Zinsstrukturmodellen entwickelt. Darunter fallen die sogenannten Gleichgewichts- und No-Arbitrage-Modelle. Gleichgewichtsmodelle modellieren Dynamiken instantaner Zinsen. Häufig handelt es sich dabei um affine Modelle, welche Zinsen anderer Laufzeiten unter der Annahme eines Marktpreises des Risikos berechnen. No-Arbitrage-Modelle sind hingegen so aufgestellt, dass sie die Zinsstruktur zu einem Zeitpunkt perfekt darstellen, um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen. Dies ist besonders wichtig für das Bewerten von Derivaten. Auch bei No-Arbitrage-Modelle werden Zinsen anderer Laufzeiten unter der Annahme eines Marktpreises des Risikos berechnet. Ein Überblick über diese Modellvarianten wird in Abschnitt 4.1 vorgestellt.

Um strategische Investmententscheidungen zu treffen, sind diese Modelle weniger geeignet. Duffee (2002) stellt fest, dass affine Modelle, deren Focus hauptsächlich auf dem *In-Sample Fit* liegen, schlechte Resultate im Hinblick auf reale Zinskurvenentwicklungen liefern. In diesem Kapitel werden die untersuchten Zinsmodelle einem *Out-Of-Sample* Test unterzogen, d.h. die simulierten Zinspfade werden auf ihre realen Eigenschaften hin untersucht. Diese Eigenschaften wurden bei der empirischen Zinskurvenanalyse im 2. Kapitel festgestellt. Der Fokus der Untersuchungen liegt auf den **Schwankungen** sowie auf den **Formen** der Zinskurven<sup>1</sup>. Der Eigenschaftenkatalog umfasst:

- Schwankungen
  - Verteilung der Tageszinsänderungen
  - Varianzen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen
  - Lag-1 Autokorrelation nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen

---

<sup>1</sup>In vielen Arbeiten wird als Maß für Realitätsnähe der durchschnittliche Abstand (root mean square error, kurz: RMSE vgl. S.74) der simulierten Zinskurve zur tatsächlich beobachteten Kurve verwendet. Der hier gewählte Ansatz untersucht direkt die simulierten Zinskurven anhand real beobachteter (statistischer) Kriterien.



- Formen
  - Verteilung der Zinskurven-Steigungen
  - Verteilung der Zinskurven-Krümmungen
  - Eigenwerte und Eigenvektoren
  - Plausibles Aussehen der modellierten Zinskurven

Neben den empirischen Statistiken spielt das realistische Aussehen der modellierten Zinskurven eine entscheidende Rolle<sup>2</sup>. Da das Modell für Investmententscheidungen in der Praxis verwendet werden soll, muss es Akzeptanz bei den Anwendern finden. Sobald diese sehr unrealistische Zinsszenarien feststellen, werden sie die Aussagekraft der Analysen anzweifeln. Des Weiteren ist es wichtig, nach der Berechnung einer P&L Verteilung inhaltliche Analysen durchzuführen. Es muss nachvollziehbar sein, welche Zinskurvenszenarien zu Ausreißern in der Bewertung geführt haben. Dazu sind reale Zinskurven wichtig, um einen historischen Vergleich ziehen zu können. Ebenso reagieren einige strukturierte Zinsprodukte sehr sensitiv auf Änderungen der gesamten Zinskurvenform. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, wenn seltene Merkmale implizit in den modellierten Kurven enthalten sind und nicht explizit vorgegeben werden müssen. Gerade die untypischen Zinskurvenformen können zu überraschenden Wertentwicklungen der Produkte führen.

Im Folgenden wird ein Überblick der Pricingmodelle aufgestellt und als ein Beispiel das CIR-1 Modell untersucht. Anschließend wird das dynamische Nelson-Siegel Modell, welches von der EZB zur Zinssimulation verwendet wird, vorgestellt und anhand des Eigenschaftenskatalogs untersucht. Zum Schluss wird ein Resampling (Bootstrapping) Verfahren eingeführt, um wichtige empirische Statistiken der Zinskurven (asymptotisch) exakt zu modellieren. Das von Rebonato *et al* (2005) vorgestellte Resamplingmodell (kurz: RMJBN Modell) wird durch eine Modifizierung in der Modellierung der Zinskurven-Krümmungen erweitert<sup>3</sup> und unter dem Namen „Extended RMJBN Modell“ vorgestellt. Die Auswertungen werden am Ende miteinander verglichen.

## 4.1 Pricing Modelle

Ziel der Pricingmodelle ist die Modellierung der Zinskurvenentwicklung, um Derivate arbitragefrei bewerten zu können. Dabei wird in der Praxis vor allem auf die analytische Handhabbarkeit und die Schnelligkeit von Berechnungen geachtet.

<sup>2</sup>Die EURIBOR Zinskurven von 1999 bis 2008 sind unter <http://vids.myspace.com/index.cfm?fuseaction=vids.individual&videoid=43992868> zu sehen.

<sup>3</sup>wodurch es zu realistischeren Zinskurvenverläufen kommt.

Das erste Modell zum Bewerten von einfachen europäischen Zinsderivaten (Bondoptionen, Caps, Swaptions) war das **Modell von Black** und ähnelt der Struktur nach dem Black-Scholes-Modell aus dem Jahre 1973. Die zugrunde liegende Verteilungsannahme ist die Lognormalverteilung. Der natürliche Logarithmus des Basiswerts (z.B. Aktienkurs oder Zins) einer Option folgt hier einem Wiener-Prozess<sup>4</sup>. Die oben genannten Derivate werden auch heute noch mit der Black-Formel bewertet und am Markt mittels der impliziten Volatilitäten quotiert.

Die Grenzen des Black Modells sind allerdings schnell erreicht. Das Modell setzt voraus, dass ein Zinssatz oder eine andere Variable zu einem zukünftigen Zeitpunkt lognormalverteilt ist. Zum Bewerten von Zinsderivaten amerikanischen Typs oder strukturierten Anleihen wird die Modellierung der Zinsstruktur im Zeitablauf benötigt. Um dieses Problem zu lösen, wurden sogenannten Zinsstrukturmodelle entwickelt. Man unterscheidet zwischen:

- Einfaktormodellen
  - Gleichgewichtsmodellen
    - \* Vasicek (1977)
    - \* Cox, Ingersoll, Ross (CIR) (1985)
  - No-Arbitrage-Modellen
    - \* Ho, Lee (1986)
    - \* Hull-White (1994)
- Mehrfaktormodellen
  - Gleichgewichtsmodellen
    - \* Mehrdimensionale Vasicek (1977)
    - \* Mehrdimensionale Cox, Ingersoll, Ross (CIR2/CIR2++)
  - No-Arbitrage-Modellen
    - \* Mehrdimensionale Hull-White Modell (1994)
    - \* Heath-Jarrow-Morton Framework (1992)
    - \* LIBOR Markt Modelle (1997)

Die Unterschiede zwischen den Modellklassen werden in diesem Kapitel noch beschrieben. Die obige Auflistung stellt nur einen kleinen Auszug aus den vorhanden

---

<sup>4</sup>Die für dieses Kapitel relevanten stochastischen Grundlagen werden im Anhang A1 erläutert.

Modellen dar. Im Laufe der Zeit gab es eine Menge Weiterentwicklungen von Jump-Diffusion Modellen bis hin zu Stochastic-Volatility Modellen. Zur Entwicklung geeigneter Pricingmethoden, um Mark to Market Bewertungen zu einem zukünftigen modellierten Zeitpunkt durchzuführen (vgl. S. 5 und Abb. 1.2), könnten diese Modelle eine wichtige Rolle spielen<sup>5</sup>. Ein sehr guter und praxisbezogener Überblick über die aktuellen Modelle ist in Brigo, Mercurion (2002) zu finden.

Die Dynamiken dieser Modelle sind stochastische Differentialgleichungen und werden so aufgestellt, dass sie die Zinskurven entweder unter der realen Verteilung  $P$  oder direkt unter einer risikoneutralen Verteilung beschreiben. Dies ist für Bewertungen von Derivaten durchaus sinnvoll, allerdings sind diese Dynamiken nicht geeignet, langfristige Zinskurvenentwicklungen unter der empirischen Verteilung zu modellieren. Um den Wechsel zwischen der risikoneutralen und der empirischen Dynamik zu vollziehen, muss ein Marktpreis des Risikos bestimmt werden. Die Wahl dieser Größe basiert allerdings nicht auf ökonomischen Argumenten, sondern auf dem Ziel der analytischen Handhabbarkeit der Dynamiken. Der Wechsel zwischen den beiden Verteilungen beeinflusst bei diesen Modellen nur den Driftterm und nicht den stochastischen Teil der Dynamik (vgl. Abbildung 4.1). Wird nun, auf Grund einer nicht korrekten Wahl des Marktpreises des Risikos<sup>6</sup>, ein falscher Drift für die Dynamik unter dem empirischen Maß bestimmt, so dominiert dieser Driftterm bei langfristigen Zinskurvenmodellierungen die Dynamik und es entstehen nicht reale Zinskurvenszenarien. Die Modelle werden so aufgestellt, dass sie die empirisch beobachteten Zusammenhänge (z.B. Mean Reverting) der Zinskurven beschreiben und die aktuelle Zinsstruktur perfekt nachbilden sollen. Allerdings sind diese Modelle schon ihrem Aufbau nach nicht exakt genug, um reale langfristige Zinsszenarien zu modellieren. Beispielsweise beschreiben Einfaktormodelle die Zinsstrukturkurven nur durch einen stochastischen Treiber, wohingegen Mehrfaktormodelle häufig mit bis zu drei stochastischen Faktoren eingesetzt werden und somit mehr Zinskurvenausprägungen zulassen. Die empirischen Daten liefern aber weitaus mehr mögliche Zinskurvenformen, die selbst durch drei Faktoren nicht immer dargestellt werden können. Als Beispiel für ein Pricing-Modell wird in diesem Abschnitt das CIR Modell näher untersucht.

---

<sup>5</sup>insbesondere Stochastic-Volatility Modelle scheinen für diesen Zweck geeignet zu sein. Um genauere Aussagen zu machen, bedarf es an dieser Stelle weitere Untersuchungen, welche den Rahmen dieser Arbeit übersteigen würden.

<sup>6</sup>Der Drift beinhaltet unter  $P$  die Risikoprämie. Diese wird unter  $Q$  dem Drift entzogen und ist jetzt implizit in der Verteilung  $Q$  enthalten. Vgl. S.54

### 4.1.1 Einfaktormodelle

Die folgende Beschreibung der Einfaktormodelle und deren Herleitung orientiert sich an Chevalier (2005) sowie Björk (1996). Wie der Name „Einfaktormodell“ schon verrät, ist bei diesen Modellen ein einzelner Faktor die alleinige erklärende Größe für die gesamte Zinsstruktur. Normalerweise wird als Faktor der kurzfristige stetige Zinssatz  $r(t)$  verwendet. Daher findet man diese Modelle auch oft unter dem Namen **Short Rate Modelle**. Der Vorteil dieser Modelle besteht darin, dass nur  $r(t)$  modelliert werden muss und durch die geforderte Arbitragefreiheit alle übrigen Größen wie Zinssätze, Bondpreise etc. implizit gegeben sind<sup>7</sup>. Aus diesem Grund besteht der Unterschied zwischen den Shortrate Modellen nur in der Modellierung von  $r(t)$ . Im Folgenden wird zuerst untersucht, wie durch Arbitragebedingungen Bondpreise und damit die gesamte Zinsstrukturkurve bestimmt werden kann. Anschließend wird als Beispiel das CIR-1 Modell betrachtet.

#### Differentialgleichungsansatz

Dieser Ansatz wurde von Vasicek (1977) beschrieben und bildet ein risikofreies Portfolio aus zwei Anlagen unterschiedlicher Laufzeiten. Dieser ältere Ansatz wird hier vorgestellt, da er die Funktion der Risikoprämie verständlich darstellt und interessante Einsichten in den danach behandelten Martingalansatz bietet.

Bonds werden in diesen Modellen als Derivate der Shortrate  $r(t)$  betrachtet. Da das Geldmarktkonto der einzige durch die Shortrate gegebene Preisprozess ist, lassen sich Bondpreise nicht nur durch die Shortrate alleine bestimmen. Es ist offensichtlich nicht möglich, nur mit dem Geldmarktkonto ein replizierendes Portfolio für ein Derivat aufzustellen. Der gegebene Markt ist also *nicht vollständig*, wie es z.B. beim Black Scholes Modell oder beim Binomialmodell aus Kapitel 3 der Fall ist. Um das Problem in den Griff zu bekommen, nutzt man die Konsistenzbedingungen von Bonds aus und verwendet zwei T-Bonds verschiedener Laufzeiten zum Anlegen eines risikofreien Hedge-Portfolios. Aus solchen Portfolios erhält man eine Differentialgleichung, die zur Vermeidung von Arbitragemöglichkeiten von allen T-Bonds erfüllt werden muss. Die folgende Herleitung orientiert sich an Björk (1996).

$B(t, T)$  sei der Preis eines T-Bonds. Die Shortrate  $r(t)$  sei unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  durch folgenden Itô-Prozess gegeben:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t \quad (4.1)$$

<sup>7</sup>Zur Modellierung der Short Rate ist zusätzlich noch die Angabe eines Marktpreises des Risikos notwendig, wie später gezeigt wird.

Im Folgenden gilt  $B \equiv B(t, T)$ ,  $\mu \equiv \mu(t, r(t))$  und  $\sigma \equiv \sigma(t, r(t))$ . Mit Itô's Lemma folgt:

$$\begin{aligned} dB &= \left[ \frac{\partial B}{\partial t} + \mu \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right] dt + \left[ \frac{\partial B}{\partial r} \sigma \right] dW_t \\ \Rightarrow \frac{dB}{B} &= \underbrace{\frac{1}{B} \left[ \frac{\partial B}{\partial t} + \mu \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right]}_{=\mu_B} dt + \underbrace{\frac{1}{B} \left[ \frac{\partial B}{\partial r} \sigma \right]}_{=\sigma_B} dW_t \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es wird nun ein Portfolio aus zwei Bonds mit den Fälligkeiten  $T_1$  und  $T_2$  sowie den Preisen  $B_1$  und  $B_2$  aufgestellt. Da die beiden Bonds perfekt miteinander korreliert sind, muss es möglich sein, durch die Wahl der relativen Portfolioanteile  $u_1$  und  $u_2$  den Einfluss des Diffusionsterms auf die Entwicklung des Portfoliowertes zu entfernen. Die Dynamik der Portfoliowertes ist gegeben durch

$$\begin{aligned} dP(t) &= P(t) \left( u_1 \frac{dB_1}{B_1} + u_2 \frac{dB_2}{B_2} \right) \\ \Rightarrow dP(t) &= P(t)(u_1 \mu_{B_1} + u_2 \mu_{B_2})dt + P(t)(u_1 \sigma_{B_1} + u_2 \sigma_{B_2})dW_t \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Anteile werden nun als Lösung des folgenden Gleichungssystems gewählt:

$$u_1 + u_2 = 1$$

$$u_1 \sigma_{B_1} + u_2 \sigma_{B_2} = 0$$

Durch die Lösungen

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\sigma_{B_2}}{\sigma_{B_1} - \sigma_{B_2}} \\ u_2 &= \frac{\sigma_{B_1}}{\sigma_{B_1} - \sigma_{B_2}} \end{aligned}$$

entfallen in (4.3) die Diffusionsterme und man erhält folgenden Portfoliowerteprozess:

$$\begin{aligned} dP(t) &= P(t)(u_1 \mu_{B_1} + u_2 \mu_{B_2})dt \\ &= P(t) \frac{\mu_{B_2} \sigma_{B_1} - \mu_{B_1} \sigma_{B_2}}{\sigma_{B_1} - \sigma_{B_2}} dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

Das Portfolio (4.4) erzeugt zum Zeitpunkt  $t$  eine kurzfristig sichere Rendite von  $\frac{\mu_{B_2} \sigma_{B_1} - \mu_{B_1} \sigma_{B_2}}{\sigma_{B_1} - \sigma_{B_2}}$ . Um Arbitrage auszuschließen, muss diese Rendite der Shortrate  $r(t)$

entsprechen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{B_2}\sigma_{B_1} - \mu_{B_1}\sigma_{B_2}}{\sigma_{B_1} - \sigma_{B_2}} &= r(t) \\ \Rightarrow \frac{\mu_{B_1} - r(t)}{\sigma_{B_1}} &= \frac{\mu_{B_2} - r(t)}{\sigma_{B_2}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Da weder die rechte Seite von  $T_1$  noch die linke Seite von  $T_2$  abhängt, gilt auf einem arbitragefreien Markt für alle  $T$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_B - r(t)}{\sigma_B} &= \lambda(t, r(t)) \\ \Rightarrow \mu_B &= r(t) + \underbrace{\lambda(t, r(t))\sigma_B}_{\text{Risikoprämie}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Momentanrendite  $\mu_B$  besteht aus dem kurzfristigen Zins plus einer Risikoprämie, die unabhängig von  $T$  ist. Der Prozess  $\lambda(t, r(t))$  wird Marktpreis des Risikos genannt. Es handelt sich dabei um den Preis, den ein Investor pro Risikoeinheit über das sichere Maß hinaus fordert. Die Höhe des Risikos der Anlage ist durch  $\sigma_B$  gegeben. Für risikoaverse Investoren gilt  $\lambda(t, r(t)) > 0$ , für risikoneutrale  $\lambda(t, r(t)) = 0$  und für risikofreudige  $\lambda(t, r(t)) < 0$ . Im nächsten Abschnitt stellt  $\lambda(t, r(t))$  die Verbindung zwischen dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  und dem risikoneutralen  $Q$  her. Der Preis eines Zero Bonds  $B(t, T)$  muss also jederzeit die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{B} \left[ \frac{\partial B}{\partial t} + \mu \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right]}_{\mu_B} &=^{(4.6)} r(t) + \lambda(t, r(t)) \underbrace{\frac{1}{B} \left[ \frac{\partial B}{\partial r} \right]}_{\sigma_B} \\ \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} + (\mu - \lambda(t, r(t))\sigma) \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - r(t)B &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit der Nebenbedingung  $B(T, T) = 1$  erfüllen. Alternativ kann die Lösung auch als Erwartungswert wie folgt dargestellt werden:

$$B(t, T) = E_P \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda^2(s, r(s)) ds - \int_t^T \lambda(s, r(s)) dW_s \right) | F_t \right] \quad (4.8)$$

Ein Beweis ist in Vasicek (1977) zu finden. Das Ergebnis macht deutlich, dass die Modellierung von  $r(t)$  alleine nicht ausreicht. Zur eindeutigen Bondpreisbestimmung muss auch  $\lambda$  angegeben werden.

### Martingalmethode

Der Martingalansatz ist eine in der Finanzmathematik weitverbreitete Methode zur arbitragefreien Preisberechnung von Derivaten und geht auf Harrison und Kreps (1979) zurück. Artzner und Delbaen (1989) sowie Heath, Jarrow, Morton (1992) haben diesen Ansatz erstmals für die Modellierung der Zinsstruktur angewandt. Im Folgenden werden nur die zur Modellierung der Zinsstruktur benötigten Ergebnisse vorgestellt. Vollständige Herleitungen sind in Artzner und Delbaen (1989) und Björk (1996) zu finden<sup>8</sup>.

Die wichtigsten Zusammenhänge dieser Methode werden nun kurz erläutert<sup>9</sup>. Sei  $N(t)$  der (strikt positive) Preisprozess eines beliebigen Numerairs und  $V(t)$  der Preis des zu bewertenden Finanzinstruments zum Zeitpunkt  $t$ . Der relative (normierte) Preis sei  $V^*(t) = \frac{V(t)}{N(t)}$ . Beim Martingalansatz wechselt man nun vom realen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  zu einem risikoneutralen, äquivalenten<sup>10</sup> Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$ , sodass der heutige normierte Preis  $V^*(t)$  eines beliebigen handelbaren Finanzinstruments gleich dem Erwartungswert unter  $Q$  des zukünftigen normierten Preises ist.  $V^*(t)$  ist also bezüglich  $Q$  ein Martingal. Es gilt definitionsgemäß

$$E_Q[V^*(T)|F_t] = V^*(t). \quad (4.9)$$

Das vom Numeraire  $N(t)$  abhängende Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  existiert in einem arbitragefreien Markt immer und ist eindeutig. Bei der Bewertung von T-Bonds wählt man als Numeraire das Geldmarktkonto  $B(t)$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{B(t, T)}{B(t)} &= E_Q \left[ \frac{B(T, T)}{B(T)} | F_t \right] \\ \Rightarrow B(t, T) &= E_Q \left[ B(t) \frac{B(T, T)}{B(T)} | F_t \right] \\ &= E_Q \left[ \frac{\exp \left( \int_0^t r(s) ds \right)}{\exp \left( \int_0^T r(s) ds \right)} | F_t \right] \\ &= E_Q \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) | F_t \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Im nächsten Schritt wird das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  bestimmt.

<sup>8</sup>Eine umfangreiche Einführung in die Martingalmethoden ist in [Mus04] zu finden.

<sup>9</sup>vgl. [Deu04] S.213

<sup>10</sup> Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße heißen äquivalent, wenn sie exakt darin übereinstimmen, was möglich ist und was nicht. D.h. ein Ereignis ist in einem Maß genau dann unmöglich (Wahrscheinlichkeit null), wenn es auch in dem äquivalenten Maß unmöglich ist. [Deu04] S.216

Dazu muss der Marktpreis des Risikos  $\lambda$  angegeben werden, um  $Q$  eindeutig festzulegen. Die Angabe von  $Q$  bzw.  $\lambda$  ist deshalb äquivalent. Da es bei der Wahl von  $\lambda$  keine Einschränkungen gibt, ist aus theoretischer Sicht die Wahl von  $Q$  beliebig. Vergleicht man Gleichungen (4.8) und (4.10)

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E_Q \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) | F_t \right] \\ &= E_P \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda^2(s, r(s)) ds - \int_t^T \lambda(s, r(s)) dW_s^P \right) | F_t \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

ist zu erkennen, dass in der real-risikoneutralen Welt ( $\lambda = 0$ ),  $Q = P$  gilt. Der Marktpreis des Risikos  $\lambda$  ist also implizit im Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  enthalten, da die Preise in der realen sowie in der bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt übereinstimmen müssen und die Investoren in der realen Welt nicht riskoneutral sind. Dieses Ergebnis ist in Kapitel 3 genau erklärt worden. Besteht das Ziel nur aus dem Bewerten von Derivaten, kann ein Modell direkt unter dem Maß  $Q$  aufgestellt werden, wie es z.B. im Falle des Vasicek oder CIR Modells gemacht wird. Möchte man aber die Dynamik unter  $P$  betrachten, muss der Maßwechsel vollzogen werden. Der Marktpreis des Risikos  $\lambda$  spielt dabei die Vermittlerrolle zwischen den beiden Welten.

Wenn zwei Wahrscheinlichkeitsmaße äquivalent sind, ist es möglich, das eine Maß bezüglich des anderen durch die sogenannte **Radon-Nikodym Ableitung** zu beschreiben. Sei  $(\Omega, F, (F_t)_t, P)$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem ein Martingal  $M_t$  existiert, sodass

$$Q(A) = \int_A M_t(\omega) dP(\omega), \quad A \in F_t$$

gilt. Man schreibt dann für  $M_t$ :

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{F_t} = M_t$$

Das **Girsanov Theorem** gibt an, wie sich eine stochastische Differentialgleichung (kurz: SDE) nach dem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaß ändert. Es stellt sich heraus, dass sich nur der Drift einer SDE bei einem Maßwechsel ändert und der Diffusionsterm erhalten bleibt. Die Form des Drifts ist also ein Effekt des Maßsystems (Koordinatensystems) und daher eine recht künstliche Konstruktion. Aus diesem Grund ist es wichtig, bei Anwendungen wie beispielsweise dem Risikomanagement, das betreffende Modell unter  $P$  und nicht unter  $Q$  zu verwenden. Davon



unabhängig muss man je nach Einsatzzweck entscheiden, welches Modell am geeignetsten erscheint. Aus dem Girsanov Theorem folgt nun die Radon-Nikodym-Ableitung von  $P$  nach  $Q$ , die gegeben ist durch

$$\frac{dQ}{dP}|_{F_t} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s, r(s))ds - \int_0^t \lambda(s, r(s))dW_s^P\right). \quad (4.12)$$

Die Beziehung zwischen dem Wiener Prozess  $W_t^P$  unter  $P$  und dem Wiener Prozess  $W_t^Q$  wird durch

$$W_t^Q = W_t^P + \int_0^t \lambda(s, r(s))ds \quad (4.13)$$

oder in der Differentialschreibweise

$$dW_t^Q = dW_t^P + \lambda(t, r(t))dt \quad (4.14)$$

beschrieben. Ein Beweis ist z.B. in Artzner und Delbaen (1989) zu finden. Sei nun  $r(t)$  unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  durch die SDE

$$dr(t) = \tilde{\mu}(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t^P \quad (4.15)$$

definiert. Dann folgt für den Prozess unter  $Q$  mit Gleichung (4.14)

$$\begin{aligned} dr(t) &= \tilde{\mu}(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t^P \\ &= \tilde{\mu}(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))(dW_t^Q - \lambda(t, r(t))dt) \\ &= [\tilde{\mu}(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))]dt + \sigma(t, r(t))dW_t^Q. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sei nun  $\mu(t, r(t)) = \tilde{\mu}(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t))$  der Drift unter  $Q$  mit der dazugehörigen SDE:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t^Q \quad (4.17)$$

Damit folgt für die Differentialgleichung unter  $Q$  im Vergleich zu (4.7):

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mu \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - r(t)B = 0 \quad (4.18)$$

mit der Nebenbedingung  $B(T, T) = 1$ . Nun können z.B. explizite Lösungen für die Differentialgleichung angegeben werden, um Bondpreise schnell zu berechnen. Wenn es eine solche Lösung nicht gibt, besteht noch die Möglichkeit, den Erwartungswert (4.10) mittels einer Monte Carlo Simulation oder durch das Aufstellen eines Pfadbaums zu berechnen.

### Verschiedene Modellansätze

Man unterscheidet zwischen sogenannten zeithomogenen Modellen (Gleichgewichtsmodellen) und zeitinhomogenen Modellen (No-Arbitrage-Modellen). Gleichgewichtsmodelle wurden ursprünglich unter dem Maß  $P$  aufgestellt und der Marktpreis des Risikos so gewählt, dass die Dynamik unter  $P$  und  $Q$  die gleiche Form annimmt. Deshalb werden diese Modelle in den meisten Literaturquellen direkt unter  $Q$  angegeben.

#### ZEITHOMOGENE MODELLE

Das bekannteste Modell dieser Klasse ist das **Vasicek Modell**. Die Dynamik der Shortrate wird durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$dr(t) = k(\Theta - r(t))dt + \sigma dW_t^Q \quad (4.19)$$

modelliert, wobei  $k$ ,  $\Theta$  und  $\sigma$  positive Konstanten sind. Die Konstante  $k$  bestimmt die Stärke des Mean Reverting Verhaltens und  $\Theta$  ist das langfristige Mean Reverting-Level. Es lässt sich zeigen, dass  $r(t)$  normalverteilt ist. Damit besteht die Möglichkeit zu negativen Zinsen. Aus diesem Grund wird das Vasicek Modell in der Praxis selten eingesetzt.

Die Shortrate des **Cox, Ingersoll, Ross Modells** folgt der SDE:

$$dr(t) = k(\Theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^Q. \quad (4.20)$$

Der Unterschied zur SDE des Vasicek Modells besteht in dem Wurzelterm  $\sqrt{r(t)}$  im Diffusionsteil der Gleichung. Diese Modifikation führt dazu, dass negative Zinsen nicht mehr auftreten können. Anschaulich ist dies auch leicht zu erkennen. Wenn zu einem Zeitpunkt  $r(t) = 0$  auftritt, verschwindet der Diffusionsteil und durch den Mean Reverting Mechanismus wird der Zins wieder positiv. Auf Grund dieser Eigenschaft, wird das CIR Modell später zur Generierung der Zinspfade verwendet. Es soll schon im Voraus bemerkt sein, dass dieses Modell zur Klasse der affinen Zinsstrukturmodelle gehört. Bei diesen Modellen ist der stetige Zins  $R(t, T)$  eine affine Funktion der Shortrate  $r(t)$ , d.h.

$$R(t, T) = \alpha(t, T) + \beta(t, T)r(t)$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  deterministische Funktionen der Zeit sind. Diese Beziehung wird garantiert, wenn der Bondpreis in der Form

$$B(t, T) = A(t, T) \exp(-C(t, T)r(t)) \quad (4.21)$$

dargestellt werden kann. Dann gilt:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{\ln(B(t, T))}{\tau(t, T)} = -\frac{\ln(A(t, T)) - C(t, T)r(t)}{\tau(t, T)} \\ \Rightarrow \alpha(t, T) &= -\frac{\ln(A(t, T))}{\tau(t, T)} \quad \beta(t, T) = \frac{C(t, T)}{\tau(t, T)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Wie später gezeigt wird, nehmen die Bondpreise im CIR Modell diese Form an.

#### ZEITINHOMOGENE MODELLE

Der Nachteil der zeithomogenen Modelle besteht darin, dass sie nicht automatisch zur aktuellen Zinsstruktur passen. Man kann sie zwar durch geschickte Wahl der Parameter an die aktuelle Zinsstruktur kalibrieren, allerdings handelt es sich dabei nur um eine grobe Anpassung. Da bereits ein kleiner Fehler im Bondpreis zu einer großen Abweichung im Preis der Bondoption führen kann, ist sie für Produkte bewertende Händler unzureichend. Die No-Arbitrage-Modelle sind nun so aufgestellt, dass sie exakt mit der aktuellen Zinsstruktur übereinstimmen. In den Gleichgewichtsmodellen ist die aktuelle Zinsstruktur ein Modelloutput. In den No-Arbitrage-Modellen hingegen ist die aktuelle Zinsstruktur ein Modellinput<sup>11</sup>. Ein bekannter Vertreter dieser Modellklasse ist das **Hull-White Modell**. Die Short-rate wird in diesem Fall durch die SDE

$$dr(t) = k(\vartheta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)dW_t^Q. \quad (4.23)$$

beschrieben.  $\vartheta(t)$ ,  $a(t)$  und  $\sigma(t)$  sind deterministische Funktionen. Das Modell kann jetzt exakt durch Kalibrieren an die Marktpreise an die jeweilige Zinsstruktur angepasst werden.

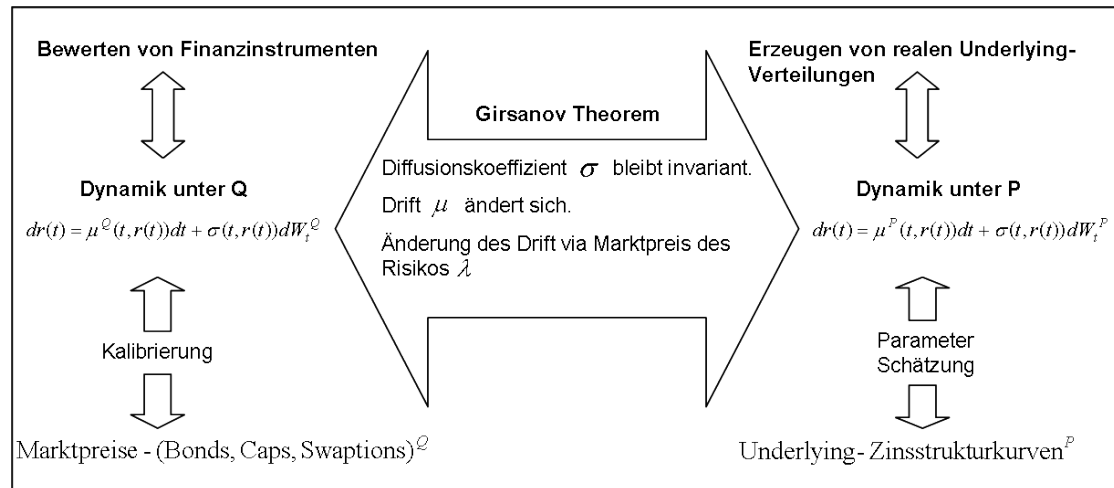
Zur Erzeugung von Zinsszenarien unter dem Maß  $P$  ist diese Modellklasse nicht geeignet, da der Driftterm unter dem Maß  $Q$  aufgestellt ist und man durch das Kalibrieren an Marktpreise in der risikoneutralen Welt arbeitet. Über einen langen Simulationszeitraum würde dieser (künstliche) Driftterm die Zinskurvenentwicklung stark beeinflussen und zu unrealistischen Szenarien führen. Man müsste eine geeignete exogene Risikoadjustierung vorgeben, um die reale Zinskurvenentwicklung zu replizieren.<sup>12</sup> Dies würde zu einem sehr komplexen Modell führen und würde im Ergebnis, wegen möglicher fehlerhafter Modellannahmen, das Problem nicht lösen. Diese Modelle dienen somit ausschließlich dem arbitragefreien Bewer-

<sup>11</sup>vgl. [Hul06] S.781

<sup>12</sup>Ähnlich wie im Kapitel 3 der Adjustierungsfaktor bei der Callpreisbewertung unter der realen Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$ .

ten von Derivaten und sind so aufgestellt, dass sie möglichst exakt die aktuelle Zinsstruktur replizieren.

### CIR-Modell



**Abbildung 4.1:** Pricing-Modelle: Allgemeines Schema am Bsp. des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

Die folgende Beschreibung zur Simulation der Zinsstrukturkurve mittels eines CIR-1 Modells orientiert sich an Fischer, May, Walther (2003). Zur Simulation von Zinskurven in der realen Welt benötigt man die Dynamik von  $r(t)$  unter P. Um anschließend aus den simulierten Szenarien für  $r(t)$  die Zinsstruktur zu berechnen, muss man wieder auf Q wechseln können, da die geschlossene Lösung zum Berechnen der Bondpreise nur unter Q gilt. Die historischen Zeitreihen liegen natürlich unter dem realen Maß P vor, sodass die Parameter für die Dynamik unter Q aus denen für P bestimmt werden müssen. Wie aus Gleichung (4.8) ersichtlich wurde, muss zum Berechnen der Bonds der Marktpreis des Risikos  $\lambda$  spezifiziert werden. In der Arbeit von Cox, Ingersoll, Ross (1985) wird er durch

$$\lambda(t, r(t)) = \lambda_0 \sqrt{r(t)} \quad \text{mit } \lambda_0 \in R \quad (4.24)$$

angegeben. Die Wahl erfolgt ohne ökonomische Begründung und dient dazu, dass beide Prozesse unter Q und P die gleiche Form annehmen. Die Dynamik von  $r(t)$  wird unter Q durch die SDE

$$dr(t) = \underbrace{k(\Theta - r(t))}_{\mu(t, r(t))} dt + \underbrace{\sigma \sqrt{r(t)}}_{\sigma(t, r(t))} dW_t^Q. \quad (4.25)$$

beschrieben.

#### MASSWECHSEL

Mit den obigen Ergebnissen ist es jetzt möglich, die Dynamik unter  $P$  anzugeben. Vergleicht man (4.25) mit (4.16) so folgt

$$\sigma(t, r(t)) = \sigma \sqrt{r(t)} \quad (4.26)$$

sowie

$$\mu(t, r(t)) = \tilde{\mu}(t, r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma(t, r(t)) = k(\Theta - r(t)) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{\mu}(t, r(t)) &= k(\Theta - r(t)) + \lambda_0 r(t) \sigma \\ &= k\Theta - (k - \lambda_0 \sigma) r(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Einsetzen in (4.15) liefert die  $P$ -Dynamik:

$$dr(t) = [k\Theta - (k - \lambda_0 \sigma)r(t)] dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW_t^P \quad (4.29)$$

$\tilde{k} = k - \lambda_0 \sigma$  und  $\tilde{\Theta} = \frac{k\Theta}{\tilde{k}}$  stellen jetzt die Verbindung zwischen den Parametern der  $Q$  und der  $P$ -Dynamik her. Die SDE unter dem Maß  $P$  ist somit von der gleichen Form wie die SDE unter dem Maß  $Q$ :

$$dr(t) = \tilde{k}(\tilde{\Theta} - r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW_t^P. \quad (4.30)$$

Im Folgenden wird  $k\Theta = b$  gesetzt.

#### BONDPREISE

Der Bondpreis  $B(t, T)$  wird unter dem Martingalmaß  $Q$  bestimmt und muss die Differentialgleichung

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mu(t, r(t)) \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sigma(t, r(t))^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - r(t)B = 0 \quad (4.31)$$

mit der Nebenbedingung  $B(T, T) = 1$  erfüllen. Für das CIR Modell gilt  $\mu(t, r(t)) = k(\Theta - r(t))$  und  $\sigma(t, r(t)) = \sigma \sqrt{r(t)}$ . In diesem Fall ist es möglich, eine analytische Lösung anzugeben. Somit wird die aufwendige Berechnung des Erwartungswerts (4.10) über eine Simulation vermieden. Die Lösung ist aus Brigo und Mercurio (2007) entnommen:

$$B(t, T) = A(t, T) \exp(-C(t, T)r(t)) \quad (4.32)$$

wobei

$$A(t, T) = \left[ \frac{2h \exp[(k+h)\tau(T-t)/2]}{2h + (k+h)(\exp[\tau(T-t)h] - 1)} \right]^{2b/\sigma^2} \quad (4.33)$$

$$C(t, T) = \frac{2(\exp[\tau(T-t)h] - 1)}{2h + (k+h)(\exp[\tau(T-t)h] - 1)} \quad (4.34)$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2} \quad (4.35)$$

Geschätzt werden müssen die Modellparameter  $k$ ,  $b$  und  $\sigma$ , um damit die Zinsstruktur zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  über

$$R(t, T) = -\frac{\ln(B(t, T))}{\tau(t, T)} \quad (4.36)$$

zu berechnen. Aus Gleichung (4.22) folgt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{b(h-k)}{\sigma^2}. \quad (4.37)$$

Das bedeutet: Je länger die Zinsen laufen, desto weniger werden diese von der Shortrate beeinflusst. In der späteren Zinssimulation wird dies dadurch sichtbar, dass sich die langfristigen Zinsen nur sehr wenig im Zeitverlauf ändern und somit unrealistische Zinsszenarien entstehen. Um die Zinsstruktur für zukünftige Zeitpunkte  $t > 0$  unter dem realen Maß  $P$  zu bestimmen, muss zusätzlich  $\tilde{k}$  geschätzt werden, woraus sich  $\tilde{\Theta}$  berechnen lässt. Durch das Diskretisieren von (4.30) können somit zukünftige kurzfristige Zinsen  $r(t)$  simuliert werden, aus denen sich die Zinsstruktur über (4.36) ergibt.

#### PARAMETERSCHÄTZUNG

Zuerst muss anhand historischer Zeitreihen<sup>13</sup> die Dynamik von  $r(t)$  unter  $P$  geschätzt werden. Dazu wird die SDE

$$dr(t) = \tilde{k}\left(\frac{b}{\tilde{k}} - r(t)\right)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^P. \quad (4.38)$$

<sup>13</sup>Für die Shortrate wird die Zeitreihe des EONIA Eintageszinses verwendet. Hier steht  $t = 0$  für den ersten Tag und  $t = T$  den letzten Tag der Zeitreihe.

verwendet. Es existieren spezielle Schätzfunktionen aus denen sich die Parameter  $\hat{k}$ ,  $\hat{b}$  und  $\hat{\sigma}$  explizit bestimmen lassen<sup>14</sup>. Die Schätzer lauten:

$$\hat{k} = \frac{\frac{1}{T}(r(T) - r(0)) \sum_{t=1}^T \frac{1}{r(t-1)} - \sum_{t=1}^T \frac{r(t)}{r(t-1)} + T}{\Delta t \left[ T - \left( \sum_{t=1}^T r(t-1) \right) \left( \sum_{t=1}^T \frac{1}{r(t-1)} \right) / T \right]} \quad (4.39)$$

$$\hat{b} = \frac{T(r(T) - r(0)) \left( \sum_{t=1}^T r(t-1) \right)^{-1} - \sum_{t=1}^T \frac{r(t)}{r(t-1)} + T}{\Delta t \left[ T^2 - \left( \sum_{t=1}^T r(t-1) \right)^{-1} - \sum_{t=1}^T \frac{1}{r(t-1)} \right]} \quad (4.40)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T\Delta t} \sum_{t=1}^T \frac{1}{r(t-1)} \left[ r(t) - r(t-1) - \left( \hat{b} - \hat{k}r(t-1) \right) \Delta t \right]^2 \quad (4.41)$$

wobei  $\Delta t = \tau(t-1, t)$  konstant ist.

Um nach der Shortratesimulation unter P die Bondpreise zu berechnen, wird der Driftparameter  $k$  unter der Q-Dynamik benötigt (4.32). Wie schon erwähnt, ist die Q-Dynamik nicht beobachtbar und somit erhält man keine Informationen über  $k$  aus den P-Daten. Um  $k$  trotzdem zu bestimmen, werden die theoretischen Preise  $B(0, T_j)$  an die Marktpreise  $B(0, T_j)^M = \exp(-R(0, T_j)\tau(0, T_j))$ ,  $j = 1, \dots, N$  angepasst (kalibriert). Der Schätzer für  $k$  ergibt sich somit über<sup>15</sup>:

$$\hat{k} = \min_k \sum_{j=1}^N \left[ B(0, T_j) - B^M(0, T_j) \right]^2 \quad (4.42)$$

Datenzeitraum	$\hat{k}$	$\hat{b}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{k}$	$\hat{\Theta}$	$\hat{\Theta}$
Jan. 1999 - Jan. 2004	2,869	0,092	0,026	1,999	0,032	0,046
Jan. 1999 - Juli 2008	2,332	0,073	0,018	1,418	0,031	0,051

**Tabelle 4.1:** CIR-Parameter

In der Tabelle 4.1 sind die geschätzten CIR Parameter für den Datenzeitraum von 1990 - 2004 und von 1990 - 2008 zu sehen. Man erkennt die recht großen Abweichungen der Parameter in den beiden Zeiträumen. Rebonato (1998) führt diesen Umstand darauf zurück, dass durch die Optimierung Realdaten in ein falsches Modell gezwungen werden. Auch bei anderen Modellen, wie beispielsweise dem LIBOR Markt Modell, kommt es bei der Kalibrierung mit unterschiedlichen Datenzeiträumen zu großen Schwankungen. Deshalb werden diese Modelle im Front

<sup>14</sup>Die hieraus resultierenden Ergebnisse wurden durch eine einfache Schätzfunktion (Likelihood-Funktion) berechnet. Es ist ebenso möglich eine Martingal-Schätzfunktion aufzustellen. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur minimal. Siehe dazu [Fis03] und [Sor97].

<sup>15</sup>Die Optimierung wurde mittels der Zielwertfunktion in Excel durchgeführt.

Office Einsatz mindestens einmal pro Woche nachkalibriert. Erwähnenswert ist auch, dass der Marktpreis des Risikos  $\lambda(t, r(t))$ , wegen  $\hat{\lambda}_0 = \frac{\hat{k} - \tilde{k}}{\sigma} < 0$ , für beide Datenzeiträume negativ ist. D.h., entweder agieren in dem Zeitraum risikofreudige Investoren auf dem Markt oder die Modellannahmen sind nicht korrekt.

#### SIMULATION DER ZINSPFADE<sup>16</sup>

Mit den gewonnenen Parametern werden nun Zinspfade simuliert, welche anschließend nach der oben vorgestellten Eigenschaftenliste untersucht werden. Der Startzeitpunkt der Simulation ist der 4.7.2008 ( $t=0$ ). Es werden 150 Pfade mit einer Länge von 400 Tagen simuliert. Die Simulation liefert für die diskreten Zeitpunkte  $t$  die Shortrate  $r(t)$ , aus der zu jedem Zeitpunkt mittels der Gleichung (4.32) die Bondpreise berechnet werden können, um diese dann mit der Gleichung (4.36) in die Zinsstruktur zu überführen. Um die Zinspfade zu modellieren, muss die SDE (4.30) wie folgt diskretisiert werden

$$\Delta r(t) = \tilde{k}(\tilde{\Theta} - r(t))\Delta t + \sigma\sqrt{r(t)}\Delta W \quad (4.43)$$

$$\Rightarrow r(t + \Delta t) = r(t) + \tilde{k}(\tilde{\Theta} - r(t))\Delta t + \sigma\sqrt{r(t)}\Delta W \quad (4.44)$$

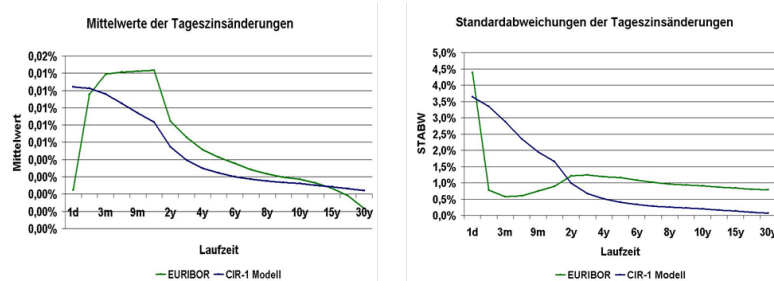
wobei  $\Delta t = \frac{1}{365}$  und  $\Delta W = Z\sqrt{\Delta t}$  mit  $Z \sim N(0, 1)$ . In der Abbildung A.4 im Anhang sind einzelne Simulationspfade mit den dazugehörigen Verteilungen nach 400 Tagen unter dem Maß P und Q zu sehen. Es zeigt sich deutlich, dass die Verteilungen stark voneinander abweichen. Die Q Verteilung ist viel breiter als die Verteilung unter P. Schon allein die Tatsache der unterschiedlichen Mean Reverting Level unter den beiden Maßen  $\hat{\tilde{\Theta}} = 3,1\%$  und  $\hat{\Theta} = 5,1\%$  bestätigen dieses Ergebnis. Um so wichtiger ist es, bei Anwendungen in denen die Simulation von Zinsen unter dem empirischen Wahrscheinlichkeitsmaß P benötigt wird, diese Unterscheidung zwischen P und Q durchzuführen. Es folgen die Auswertungen der Simulationsergebnisse.

<sup>16</sup>Eine Implementierung in VBA ist im Anhang ab S.xi ff. zu finden.



## Analyse der simulierten Zinskurven

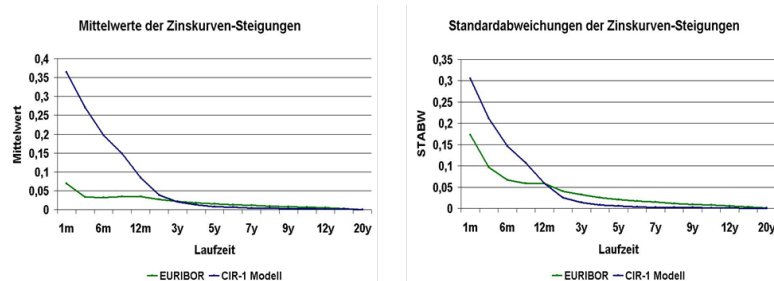
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen



**Abbildung 4.2:** CIR-1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen

Die Mittelwerte der Tageszinsänderungen sowie die Standardabweichungen der simulierten Zinsen ähneln denen der realen EURIBOR Zinskurven, weichen aber besonders im kurzfristigen Zinsbereich stark davon ab.

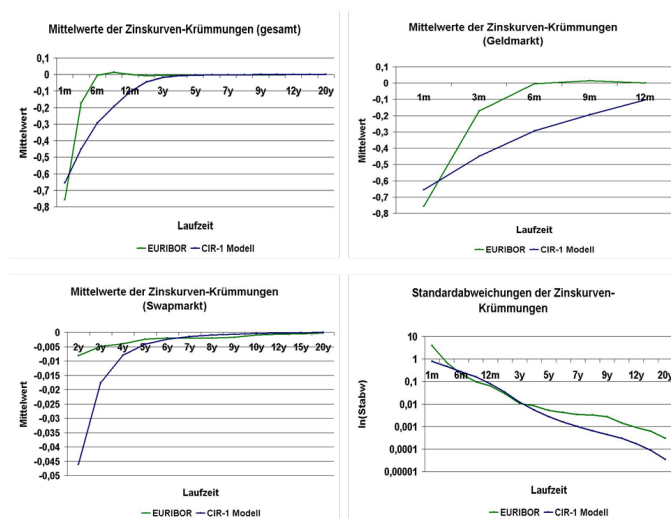
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen



**Abbildung 4.3:** CIR-1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen

Ein ähnliches Bild wie bei den Zinsänderungen ist bei den Steigungen zu beobachten. Im langfristigen Bereich stimmen die Statistiken der EUROBOR-Steigungen mit den Simulationsergebnissen in etwa überein, wobei es im kurzfristigen Zinsbereich große Abweichungen gibt.

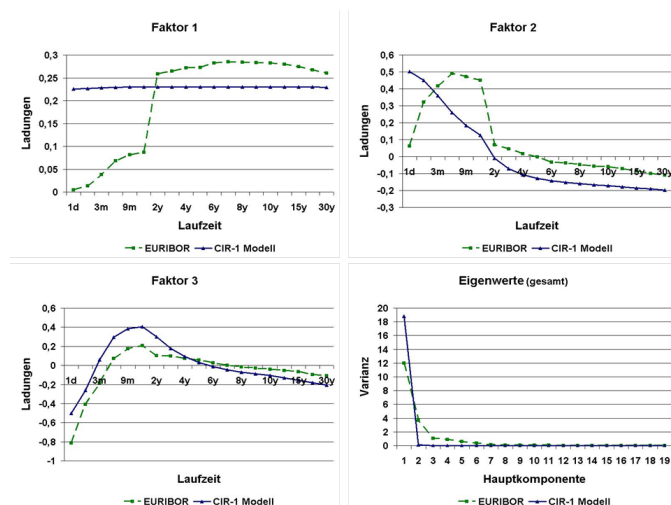
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen



**Abbildung 4.4:** CIR-1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen

Das gleiche Ergebnis ist auch bei den Mittelwerten der Zinskurven-Krümmungen zu beobachten. Im kurzfristigen Bereich sind große Abweichungen zu erkennen, wohingegen im langfristigen Bereich weitestgehend Übereinstimmung vorherrscht. Bei der Standardabweichung der Krümmungen sind die Abweichungen im langfristigen Bereich größer. Das hängt damit zusammen, dass die Variabilität der Zinsen mit Zunahme der Laufzeit abnimmt, wie mit (4.37) gezeigt wird.

- Eigenwerte und Eigenvektoren



**Abbildung 4.5:** CIR-1: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenvektoren zeigen, dass das CIR Modell drei mögliche Ausprägungen der Zinsstrukturkurve zulässt: Die Parallelverschiebung, die Drehung der Zinskurve und den Hump. Allerdings ist anhand der Eigenwerte zu erkennen, dass über 99% der Variabilität auf die Parallelverschiebungen zurückzuführen sind.

- **Varianzen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen**

In Abbildung A.5 im Anhang sind die Varianzen der q-Tagesänderungen für acht ausgewählte Zinssätze dargestellt. Die Geraden stellen die lineare Verlängerung der Varianz der Eintagesänderung dar, wobei die grünen Linien für die realen und die blauen Linien für die Modelldaten stehen. Bei den Modelldaten wurde zusätzlich der Fehlerbalken (1.STDW) geplottet, um die Schwankungsbreite der einzelnen Pfade zu verdeutlichen. Man erkennt, dass die Varianz der q-Tagesänderungen der simulierten Zinsen linear anwächst, da das Modell unabhängige und identisch verteilte Zuwächse modelliert. Mit zunehmender Zinslaufzeit fallen die Varianzen ab, wobei sie anfangs viel größer als die EURIBOR Varianzen sind und am Ende fast ganz verschwinden. Die Erklärung dafür liefert wiederum Gleichung (4.37).

- **Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen**

Die in Abbildung A.6 gezeigten Lag-1 Autokorrelationen bestätigen das obige Ergebnis, da sie im Mittel offensichtlich null sind. Ebenso wie bei den Varianzen wurden die Fehlerbalken geplottet, um die Schwankungsbreite der Pfade zu kennzeichnen.

- **Simulierte Zinskurven<sup>17</sup>**

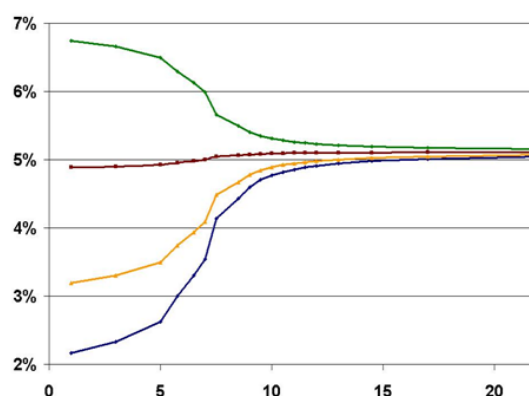


Abbildung 4.6: CIR-1: Simulierte Zinskurven.

<sup>17</sup>Die simulierten Zinspfade im Zeitablauf sind unter <http://vids.myspace.com/index.cfm?fuseaction=vids.individual&videoid=45358828> zu sehen.

Es ist deutlich zu erkennen, dass die langfristigen Zinsen sich kaum bewegen, wohingegen die kurzfristigen Zinsen sehr variabel sind. Dadurch kann es zu Zinskurven kommen, die nicht der Realität entsprechen.

### 4.1.2 Mehrfaktormodelle

Ein Mehrfaktor-CIR Modell wurde in Fischer, May, Walther (2004) untersucht. Die Autoren implementierten ein CIR-2 und CIR-3 Modell. Diese Modellvarianten garantieren einen unabhängigeren Verlauf der kurzen und langfristigen Zinsen. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass ein 2-Faktor-Modell am besten geeignet ist, um empirische Zinskurven zu modellieren. Die Pfade sehen zwar etwas realistischer aus als die des CIR-1 Modells, sind aber noch nicht zufriedenstellend. Das CIR-3 Modell hingegen modelliert teilweise völlig unrealistische Szenarien mit Zinsen, die über 20% steigen. Des Weiteren sind die Parameterschätzungen sehr aufwendig, sodass auch diese Modellvariante für den Praxiseinsatz nicht geeignet ist. Hier wird deutlich, dass die Erhöhung der Faktoren in einem Modell nicht automatisch zu realistischeren Zinskurven führt.

Heath, Jarrow, Morton (1992) entwickelten ein Zinsmodell, welches die Dynamik der instantanen Forwardraten darstellt. Das Modell ist sehr allgemein gefasst und beinhaltet einige Short Rate Modelle als Spezialfälle. Aus diesem Modell Framework leitete sich später auch das LIBOR Markt-Modell ab. Es stellt eine Art Diskretisierung dar, da nicht die instantanen Forwardraten, sondern LIBOR Raten unterschiedlicher Laufzeiten direkt modelliert werden. Das HJM-Modell gehört zu der Klasse der No-Arbitrage-Modelle und besitzt die Dynamik

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t^P,$$

wobei  $\mu(t, T)$  und  $\sigma(t, T)$  Prozesse für jedes  $T$  sind. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  kann für jedes  $T$   $f(0, T)$  gesetzt werden, sodass die Zinsstruktur wegen (2.16) zu diesem Zeitpunkt exakt abgebildet wird. Arbitragefreiheit garantiert die Driftbedingung

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \left[ \int_t^T \sigma(t, s)ds - \lambda(t) \right].$$

Hierbei ist  $\lambda(t)$  wieder der Marktpreis des Risikos. Damit folgt für die SDE der Preisdynamik

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \left[ \int_t^T \sigma(t, s)ds - \lambda(t) \right] dt + \sigma(t, T)dW_t^P.$$

Der Marktpreis des Risikos wird so gewählt, dass unter  $Q$  gilt:

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \left[ \int_t^T \sigma(t, s) ds \right] dt + \sigma(t, T) dW_t^Q.$$

Die Wahl von  $\sigma(t, T)$  ist beliebig und man spricht deshalb auch von einem Framework, da durch die Wahl von  $\sigma(t, T)$  einige Einfaktormodelle abgeleitet werden können. Man kann  $n$  weitere Brownsche Bewegungen in die Dynamik einbauen, um ein Mehrfaktormodell zu erhalten

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) dW_{t,i}^P.$$

Auch für das HJM sowie den daraus folgenden Modellen (LIBOR Markt Modelle) hat das Schaubild 4.1 Gültigkeit. Um Zinsen unter der realen Verteilung  $P$  zu modellieren, müssen die Parameter aus den Zeitreihen geschätzt oder exogen vorgegeben werden. Auf jeden Fall sollte das Ergebnis genau überprüft werden, da bei langfristigen Simulationen ein falscher Drift die Szenarien stark negativ beeinflussen kann.

Das folgende Nelson-Siegel Modell ist ein 3-Faktor Modell, dessen Parameter direkt unter der realen Verteilung modelliert werden. Es besitzt somit einen Vorteil gegenüber den Pricingmodellen, da der Marktpreis des Risikos implizit in den realen Daten enthalten ist und nicht mehr vorgegeben werden muss.

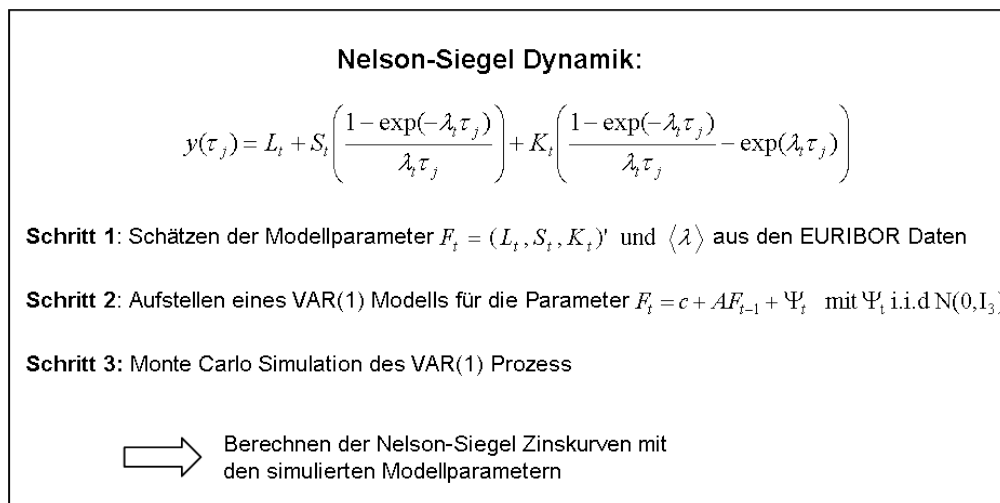
## 4.2 Dynamisches Nelson-Siegel Modell

### 4.2.1 Einleitung

Das Nelson-Siegel Modell ist ein in der Praxis weitverbreitetes Modell, um Zinskurven nachzubilden und zukünftige Zinsszenarien zu simulieren. Diebold und Lie (2006) beschreiben das Modell zum ersten Mal in einem Zeitreihenkontext, was das Simulieren von Zinsszenarien ermöglicht. Darauf aufbauend wurden einige Erweiterungen vorgestellt, wie z.B. das Einbinden von markoökonomischen Faktoren von Bernadell, Coche, Nyholm (2005). Dieses Modell wird von der EZB für langfristige Zinsvorhersagen verwendet.

Per Konstruktion operiert das Nelson-Siegel Modell unter dem realen Maß  $P$  und ist nicht arbitragefrei wie beispielsweise das CIR Modell. Der Vorteil von arbitragefreien Modellen besteht darin, dass eine gewisse Konsistenz zwischen den Parametern der Dynamik unter  $P$  und  $Q$  besteht. Diese Konsistenz garantiert Arbitragefreiheit. Christensen, Diebold, Rudebusch (2007) stellen fest, dass das

empirische Nelson-Siegel Modell schon gute Eigenschaften in der Nachbildung und im Vorhersagen von Zinskurven aufweist. Es besitzt allerdings einen theoretischen Mangel im Zulassen von Arbitragemöglichkeiten. Aus diesem Grund leiten sie ein affines arbitragefreies Nelson-Siegel Modell her, welches sich durch einen Korrekturterm vom ursprünglichen Modell unterscheidet und im Vergleich leicht bessere Ergebnisse im Simulieren von Zinskurven aufweist. Dieser Korrekturterm wirkt hauptsächlich auf Zinsen mit einer Laufzeit von mehr als 10 Jahren. Eine andere Arbeit von Coroneo, Nyholm und Vidova-Koleva (2008) untersucht das Nelson-Siegel Modell statistisch auf Arbitragefreiheit. Es kommt heraus, dass sich die Parameter eines affinen arbitragefreien Modells nicht signifikant von denen des Nelson-Siegel Modells unterscheiden, obwohl das Nelson-Siegel Modell theoretisch gesehen nicht arbitragefrei ist. Aus diesem Grund wird im Folgenden das ursprüngliche dynamische Nelson-Siegel Modell vorgestellt und eine Analyse der simulierten Zinskurven durchgeführt.



**Abbildung 4.7:** Schema der Nelson-Siegel Zinskurvensimulation

In Abbildung 4.7 ist das dreistufige Nelson-Siegel Schema dargestellt<sup>18</sup>. Im ersten Schritt werden die Modellparameter aus den historischen Daten geschätzt. Anschließend wird ein VAR(1)<sup>19</sup> Modell für diese Parameter geschätzt, mit dem im letzten Schritt die Monte Carlo Simulation durchgeführt wird. Alle Schritte werden in den nächsten Abschnitten genau erläutert.

<sup>18</sup>Eine Matlabimplementierung aller drei Schritte ist im Anhang ab S.xviii ff. zu finden.

<sup>19</sup>Vector Autoregressive Process erster Ordnung

### 4.2.2 Die Nelson-Siegel Zinsstrukturkurve und ihre Interpretation

Das ursprüngliche Nelson-Siegel Modell wird in der Praxis verwendet, um Zinsstrukturkurven darzustellen. Es wird unterstellt, dass die Forward Raten  $f(t, \tau_j)$  als Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung geschrieben werden können<sup>20</sup>:

$$f(t, \tau_j) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\lambda \tau_j} + \beta_3 \lambda \tau_j e^{-\lambda \tau_j}$$

Zwischen den Spot Rates und den Forward Rates besteht folgender algebraischer Zusammenhang<sup>21</sup>:

$$\begin{aligned} (1 + y_t(\tau_j))^{\tau_j} &= \prod_{s=1}^{\tau_j} (1 + f(t, s)) \\ \tau_j \ln(1 + y_t(\tau_j)) &= \sum_{s=1}^{\tau_j} \ln(1 + f(t, s)) \\ y_t(\tau_j) &= \frac{1}{\tau_j} \sum_{s=1}^{\tau_j} f(t, s) \end{aligned}$$

Die Spot Rates werden also aus einem Durchschnitt der momentanen Forward Raten gebildet<sup>22</sup> und es folgt somit:

$$\begin{aligned} y_t(\tau_j) &= \frac{1}{\tau_j} \int_0^{\tau_j} f(t, s) ds \\ &= \frac{1}{\tau_j} \left[ \beta_1 \tau_j - \beta_2 \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \tau_j} + \beta_3 \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \tau_j}) - \beta_3 \tau_j e^{-\lambda \tau_j} + \beta_2 \frac{1}{\lambda} \right] \\ &= \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau_j}}{\lambda \tau_j} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau_j}}{\lambda \tau_j} - e^{-\lambda \tau_j} \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

wobei  $y_t(\tau_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , der Zins mit der Laufzeit  $\tau_j$  in Jahren zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  ist.  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda$  sind die Modellparameter (Faktoren). Diebold und Li (2006) interpretieren  $\beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  als zeitlich variierende Eigenvektoren, die Level, Steigung und Krümmung der Zinskurve repräsentieren. Die Multiplikationsterme der Eigenvektoren stellen dementsprechend die Ladungen dar. Im Folgenden wird das Nelson-Siegel Modell als dynamische Version mit zeitlich va-

<sup>20</sup>Die DGL wird so gewählt, dass die typischen Verläufe der Forwardzinskurven dargestellt werden.

<sup>21</sup>Es wird  $\ln(1 + x) \approx x$  ausgenutzt.

<sup>22</sup>Dies entspricht der Erwartungswerthypothese, d.h. es wird davon ausgegangen, dass die rationalen Erwartungen der Marktteilnehmer die Zinsstrukturkurve beschreiben.

riierenden Parametern aufgestellt:

$$y_t(\tau_j) = L_t + S_t \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau_j}}{\lambda_t \tau_j} \right) + K_t \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau_j}}{\lambda_t \tau_j} - e^{\lambda_t \tau_j} \right). \quad (4.46)$$

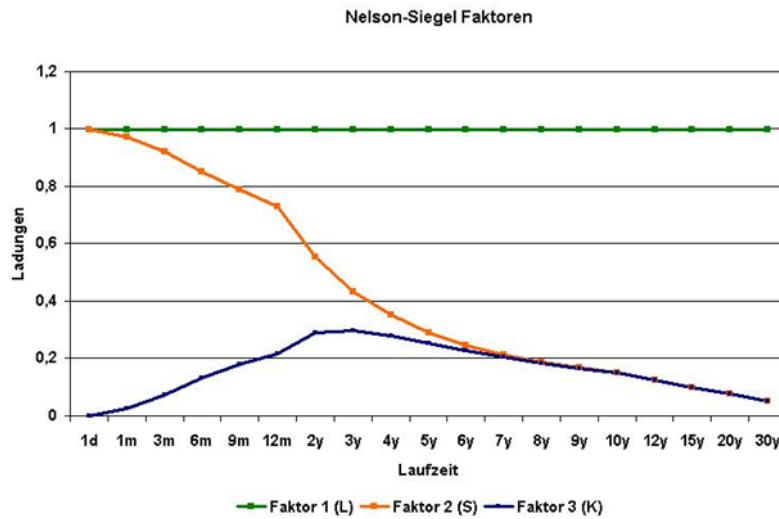


Abbildung 4.8: Nelson-Siegel Faktorladungen

Die Ladung von  $L_t$  ist konstant eins und fällt für  $\tau \rightarrow \infty$  nicht gegen null ab. Somit beeinflusst  $L_t$  die gesamte Zinskurve und eine Veränderung des Faktors bewirkt eine Parallelverschiebung.  $L_t$  kann als Level der Zinskurve angesehen werden und wird empirisch durch den 30y Zins repräsentiert.

Die Ladung von  $S_t$  wird durch die Funktion  $\left(\frac{1-e^{-\lambda_t \tau_j}}{\lambda_t \tau_j}\right)$  dargestellt. Da sie für  $\tau \rightarrow \infty$  schnell und monoton abfällt, ist  $S_t$  der Faktor, der das kurze Ende der Zinskurve am stärksten beeinflusst. Dementsprechend wird über  $S_t$  die Steigung der Zinskurve gesteuert. Frankel und Lown (1994) definieren die Steigung der gesamten Zinskurve über  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau) - y(0)$ , was im Falle des Nelson-Siegel Modells  $-S_t$  ergibt.

Die Funktion  $\left(\frac{1-e^{-\lambda_t \tau_j}}{\lambda_t \tau_j} - e^{\lambda_t \tau_j}\right)$  stellt die Ladung von  $K_t$  dar. Sie startet bei null, steigt an und fällt anschließend für  $\tau \rightarrow \infty$  wieder auf null ab. Daher wird durch den Faktor  $K_t$  der mittlere Teil der Zinskurve am stärksten beeinflusst, was eine Krümmungsänderung der gesamten Kurve zur Folge hat. Analog zu (2.19) kann man die Krümmung der gesamten Zinskurve über  $y_t(\tau_1) + y_t(\tau_{19}) - 2y_t(\tau_7) = 0,05_t - 0,51K_t^{23}$  definieren.

In Abbildung A.7 (links) im Anhang sind die aus den historischen Zeitreihen

<sup>23</sup> $\tau_1 = 0,003y$ ,  $\tau_{19} = 30y$ ,  $\tau_7 = 2y$  und  $\lambda_t = 0,66$  für alle  $t$ .



geschätzten Nelson-Siegel Faktoren als Level ( $L(t)$ ), Steigung ( $-S(t)$ ) und Krümmung ( $-0,51K(t)$ ) zu sehen. Zum Vergleich dazu werden die historischen EURIBOR Daten geplottet. Für den Level wird der  $y_t(\tau_{19}) = 30y$  Zins genommen, die Steigung wird über  $y_t(\tau_{19}) - y_t(\tau_1) = 30y - 1d$  repräsentiert und die Krümmung berechnet sich über  $y_t(\tau_1) + y_t(\tau_{19}) - 2y_t(\tau_7) = 30y + 1d - 2*2y$ . Es ist eine deutliche Übereinstimmung zu beobachten, die sich auch links in den Autokorrelationsfunktionen widerspiegelt. Auf Grund dieser Ergebnisse ist die obige Interpretation der Nelson-Siegel Faktoren gerechtfertigt. Wie man die Nelson-Siegel Faktoren genau schätzen kann, wird in dem nächsten Abschnitt beschrieben.

### 4.2.3 Schätzung der Modellparameter

Die historischen Modellparameter werden mittels Regression berechnet. Bei den zugrunde liegenden Daten handelt es sich um den bereits eingeführten EURIBOR Datensatz mit einer Beobachtungslänge von  $T = 2480$  Tagen für insgesamt  $N = 19$  Zinslaufzeiten. Im Folgenden werden alle Variablen als Vektoren dargestellt.

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{pmatrix} \quad H_t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda_t \tau_1}}{\lambda_t \tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda_t \tau_1}}{\lambda_t \tau_1} - e^{\lambda_t \tau_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda_t \tau_2}}{\lambda_t \tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda_t \tau_2}}{\lambda_t \tau_2} - e^{\lambda_t \tau_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda_t \tau_N}}{\lambda_t \tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda_t \tau_N}}{\lambda_t \tau_N} - e^{\lambda_t \tau_N} \end{pmatrix} \quad F_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ K_t \end{pmatrix} \quad E_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t(\tau_1) \\ \epsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \epsilon_t(\tau_N) \end{pmatrix}$$

Die Regressionsgleichung<sup>24</sup> lautet

$$\hat{Y}_t = H_t F_t + E_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4.47)$$

Der Fehlervektor  $E_t$  enthält die Differenzen zwischen den beobachteten und den gefitteten Zinsen und wird mittels

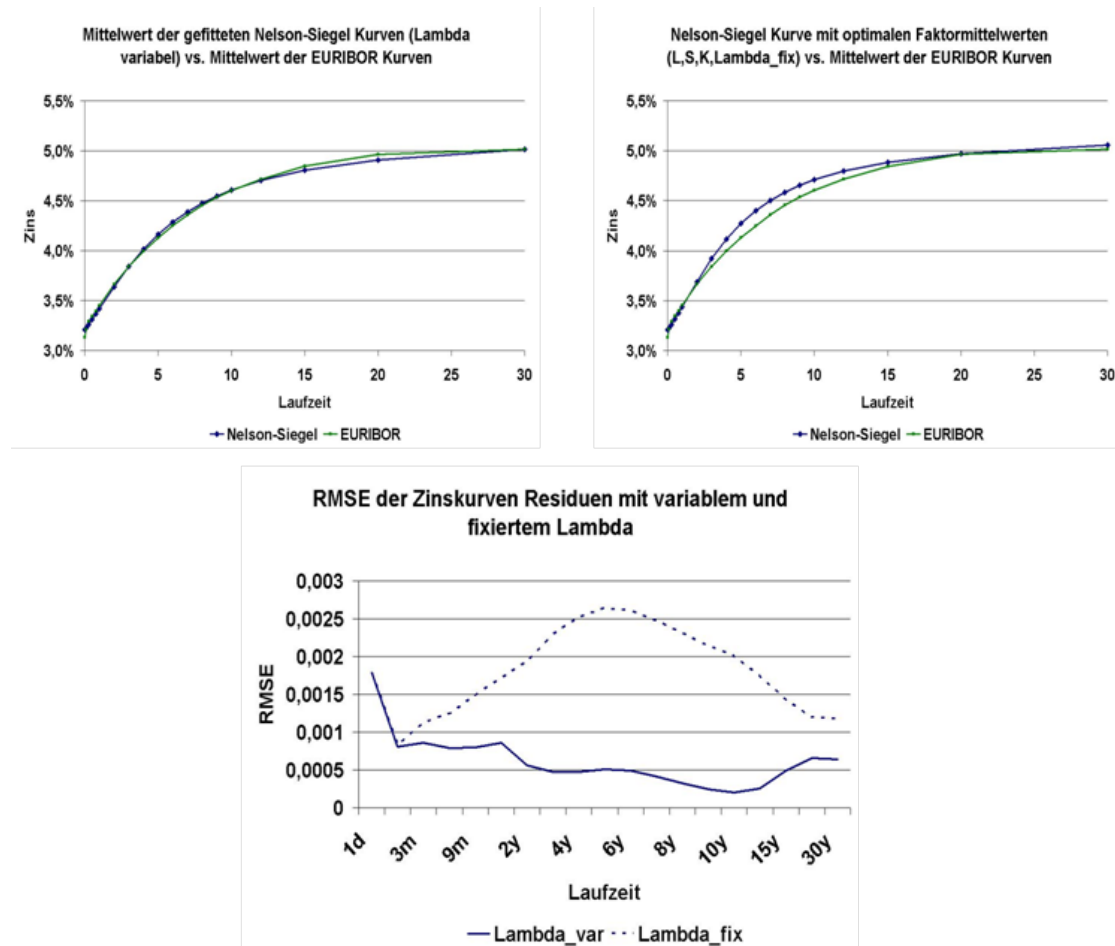
$$E_t = \hat{Y}_t - H_t F_t = \hat{Y}_t - \underbrace{H_t [(H_t' H_t)^{-1} H_t' \hat{Y}_t]}_{=\hat{Y}_t} \quad (4.48)$$

berechnet. Um die gesamten Parameter  $\Theta_t = \{L_t, S_t, K_t, \lambda_t\}$  zu schätzen, wird die Summe der quadrierten Fehlerterme für alle  $t$  minimiert, d.h.

$$\hat{\Theta}_t = \min_{\Theta_t} E_t' E_t \quad (4.49)$$

<sup>24</sup> $\hat{Y}_t$  ist der Vektor der geschätzten Zinsen.

berechnet. Für  $\lambda_t$  muss eine untere Grenze bei 0 festgelegt werden. Die obere Grenze wird so gewählt, dass die mittlere gefittete Zinskurve die geringste Abweichung zu der mittleren historischen EURIBOR-Zinskurve besitzt (vgl. Abbildung 4.9 oben links). In den folgenden Diagrammen und Tabellen sind die Ergebnisse bezüglich der geschätzten Parameter dargestellt.



**Abbildung 4.9:** oben links: Mittelwert der Nelson-Siegel Zinskurven vs. mittlere EURIBOR Zinskurve. Dabei variiert  $\lambda_t$  über die Zeit hinweg. Oben rechts: Nelson-Siegel Zinskurve mit den Mittelwerten der geschätzten Faktoren  $\langle \hat{L} \rangle, \langle \hat{S} \rangle, \langle \hat{K} \rangle, \langle \hat{\lambda} \rangle = \lambda_{fix}$  vs. mittlere EURIBOR Zinskurve. Unten: Der RMSE der beiden obigen Nelson-Siegel Zinskurven.

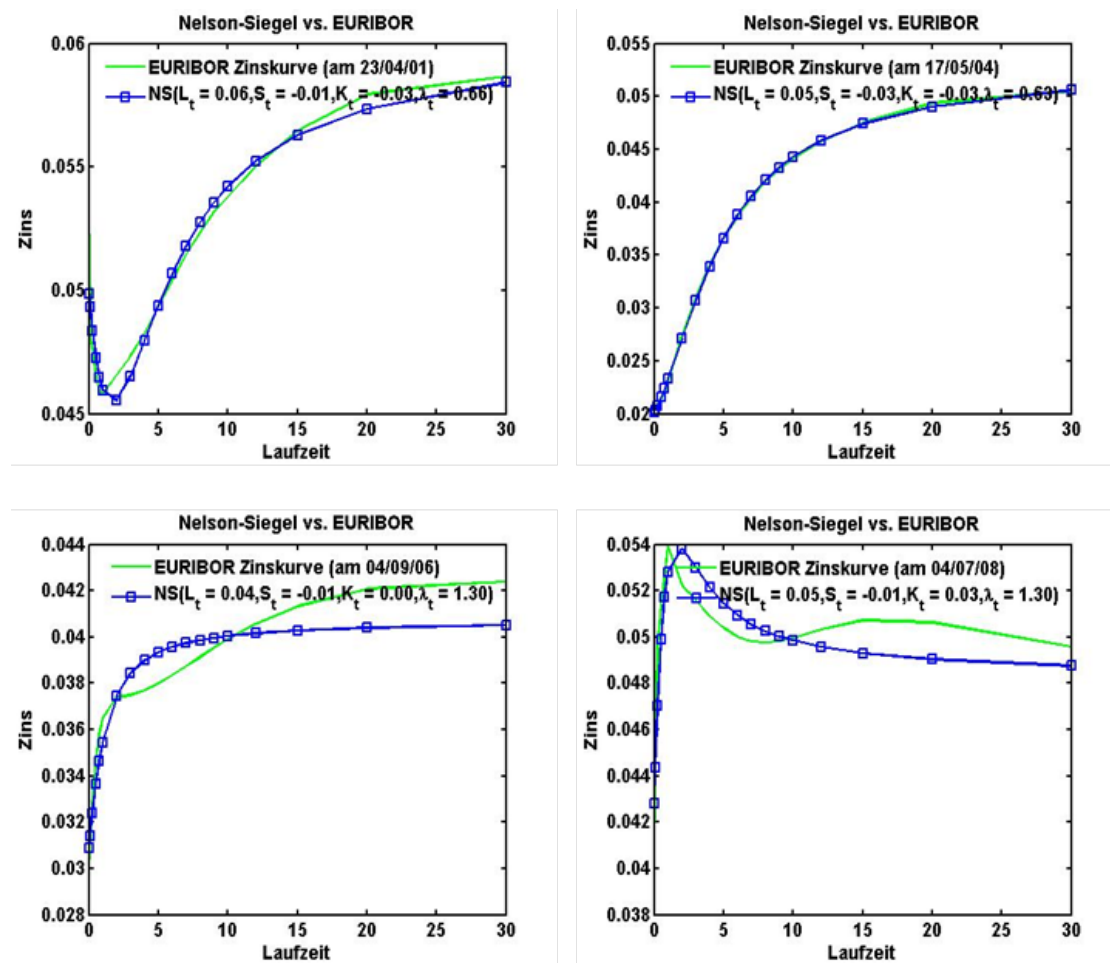


Abbildung 4.10: Gefittete Nelson-Siegel Zinskurven mit den dazugehörigen EURIBOR Zinskurven

	$\widehat{L}_t$	$\widehat{S}_t$	$\widehat{K}_t$	$\widehat{\lambda}_t$
Max	0,0664	-0,00124	0,037	1,29
Min	0,0369	-0,039	-0,0565	0,0921
Mittelwert	0,0523	-0,02	-0,0146	0,663
Stabw	0,00712	0,00942	0,0162	0,315

Tabelle 4.2: Deskriptive Statistiken der geschätzten Faktoren

	$\widehat{L}_t$	$\widehat{S}_t$	$\widehat{K}_t$	$\widehat{\lambda}_t$
$\widehat{L}_t$	1			
$\widehat{S}_t$	-0,372	1		
$\widehat{K}_t$	-0,221	0,361	1	
$\widehat{\lambda}_t$	-0,176	0,337	0,235	1

Tabelle 4.3: Korrelationstabelle der Faktoren

Die Abbildungen 4.9 (oben links) zeigt die mittlere gefittete Nelson-Siegel Zinskurve und die Abbildungen 4.9 (oben rechts) die Nelson-Siegel Zinskurve mit den mittleren gefitteten Parametern (vgl. Tabelle 4.2) im Vergleich zur mittleren EURIBOR Kurve. Im ersten Fall bedeutet dies, dass  $\lambda_t$  über die Zeit  $t$  hinweg variiert. Im zweiten Fall wurde  $\lambda_{fix} = 0,66$  gesetzt. Man sieht deutlich eine Abweichung im mittleren Zinskurvenbereich. Um diese Abweichung zu messen, stellt das Diagramm darunter den RMSE<sup>25</sup> der beiden Nelson-Siegel Zinskurven für den Fall mit fixiertem und variablem  $\lambda$  dar. Der RMSE wird wie folgt berechnet:

$$RMSE(\tau_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sqrt{(y_t(\tau_j) - \hat{y}_t(\tau_j))^2} \quad j = 1, \dots, N \quad (4.50)$$

Die Abweichung im mittleren Teil der Zinskurve wird hier nochmal sichtbar. Der Parameter  $\lambda_t$  beeinflusst somit die gesamte Krümmung der Zinskurve. Das Ergebnis ist wichtig im Hinblick auf die Entscheidung,  $\lambda_t$  bei der später folgenden Monte Carlo Simulation zu fixieren oder zu simulieren. Diebold und Lie (2006) schlagen die Fixierung des Faktors vor. Auch in anderen Publikationen wird dieser Ansatz gewählt. In Anbetracht des In-Sample Ergebnisses wäre es sinnvoll,  $\lambda_t$  zu simulieren oder zumindest die Auswirkungen auf ein Out-of-Sample-Ergebnis zu untersuchen. Allerdings stellen die Restriktionen des Parameters ein Problem dar, insbesondere bei einem multivariaten Ansatz. Da die Abweichungen nicht sehr groß sind und Diebold und Lie (2006) nach ausführlichen Tests empfehlen, den Faktor  $\lambda_t$  zu fixieren, wird dies auch in den folgenden Analysen vorgenommen.

Um die Art der Parameterprozesse festzulegen, sind die Ergebnisse der Tabellen 4.2 und 4.3 hilfreich. Tabelle 4.2 beinhaltet die Statistiken der geschätzten Faktoren und Tabelle 4.3 die Korrelationen zwischen den Parametern. Diebold und Lie (2006) schlagen vor, einen univariaten oder einen multivariaten AR(1) Prozess zur Simulation der Faktoren zu verwenden. Aufgrund der Korrelationsstruktur werden die Faktoren  $L_t, S_t, K_t$  im Folgenden als ein multivariater AR(1)-Prozess modelliert. In Abbildung 4.10 sind vier gefittete Nelson-Siegel Zinskurven mit den dazugehörigen EURIBOR Kurven abgebildet. Man sieht, dass es bei den Kurven von 2006 und 2008 größere Abweichungen gibt als bei den restlichen Kurven. Hier werden schnell die Grenzen des Nelson-Siegel Modells sichtbar. Zu den Differenzen kommt es, da per Konstruktion die Nelson-Siegel Zinskurven nur ein lokales Minimum oder Maximum modellieren können<sup>26</sup>. Die Performance der Zinskurvensimu-

<sup>25</sup>RMSE ist die Abkürzung für „Root Mean Square Error“ - die Wurzel aus dem mittleren quadratischen Fehler. Der RMSE ist ein Maß für die Abweichung eines Schätzers von einem Parameter.

<sup>26</sup>Auf Grund dieser Nachteile wurde das Nelson-Siegel-Svensson Modell entwickelt, welches wegen

lation mit diesem Modell hängt also von der Genauigkeit der Faktorsimulationen und von der Exaktheit der gefitteten Zinskurven, basierend auf den simulierten Faktoren, ab. Die Abbildung 4.9 macht aber deutlich, dass die Zinskurven im Mittel gut gefittet werden. Nun kommt es im zweiten Schritt auf eine adäquate Simulation der Faktoren an.

#### 4.2.4 VAR(1) Modellschätzung (Kleinste-Quadrate-Schätzer)

Der Ansatz von Diebold und Lie (2006) beruht auf der Simulation der Nelson-Siegel Faktoren. Als Grundlage wird ein multivariates AR(1) Modell der Dimension  $d = 3$  gewählt<sup>27</sup>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ K_t \end{pmatrix}}_{F_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_c + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} L_{t-1} \\ S_{t-1} \\ K_{t-1} \end{pmatrix}}_{F_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ \epsilon_{3t} \end{pmatrix}}_{\Psi_t}, \quad (4.51)$$

wobei  $\Psi_t$  weißes Rauschen mit dem Mittelwert Null und der Kovarianzmatrix  $\Sigma \in R^{3 \times 3}$  darstellt. Mit

$$B = (c, A) \quad Z_t = \begin{pmatrix} 1 \\ F_{t-1} \end{pmatrix}$$

lässt sich (4.51) schreiben als

$$F_t = BZ_t + \Psi_t. \quad (4.52)$$

Gesucht wird jetzt ein Schätzer für  $B$  und  $\Sigma$ <sup>28</sup>. Dazu wird (4.52) von rechts mit  $Z_t'$  multipliziert und anschließend der Erwartungswert gebildet, d.h.

$$E(F_t Z_t') = \hat{B} E(Z_t Z_t'). \quad (4.53)$$

$E(F_t Z_t')$  wird mittels

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F_t Z_t' = \frac{1}{T} F Z'$$

---

seiner 6 Faktoren mehr Zinskurvenformen zulässt. Mehr Faktoren bedeutet aber auch deutlich mehr Aufwand bei der Schätzung und Simulation der Parameter, da vor allem auf einige Restriktionen geachtet werden muss.

<sup>27</sup>Die Herleitung orientiert sich [Neu01b]

<sup>28</sup>vgl. [Lüt93] S.65

und  $E(Z_t Z_t')$  mittels

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t Z_t' = \frac{1}{T} Z Z'$$

geschätzt. Aus der daraus resultierenden Gleichung  $\frac{1}{T} F Z' = \hat{B} \frac{1}{T} Z Z'$  folgt der Schätzer

$$\hat{B} = \underbrace{F Z'}_W \underbrace{(Z Z')^{-1}}_{U^{-1}}. \quad (4.54)$$

Die Kovarianzmatrix der Residuen  $\hat{\Sigma}$  ist ein Schätzer der Kovarianzmatrix des Rauschterms  $\Sigma$  und wird dargestellt als

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} &= \frac{1}{T-d-1} \sum_{t=1}^T \hat{\Psi}_t \hat{\Psi}_t' = \frac{1}{T-d-1} (F - \hat{B} Z)(F - \hat{B} Z)' \\ &\stackrel{(4.54)}{=} \frac{1}{T-d-1} (F - F Z' (Z Z')^{-1} Z)(F - F Z' (Z Z')^{-1} Z)' \\ &= \frac{1}{T-d-1} F (I_T - Z' (Z Z')^{-1} Z) (I_T - Z' (Z Z')^{-1} Z)' F' \\ &= \frac{1}{T-d-1} F (I_T - Z' (Z Z')^{-1} Z) F' \\ &= \frac{1}{T-d-1} (\underbrace{F F'}_{=V} - F Z' (Z Z')^{-1} Z F') \\ &= \frac{1}{T-d-1} (V - W U^{-1} W'). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Die Matrix  $V - W U^{-1} W'$  ist das Schur-Komplement von  $U$  (regulär) der Matrix

$$\Pi = \begin{pmatrix} U & W' \\ W & V \end{pmatrix} = D' D,$$

wobei  $D$  die Datenmatrix

$$D = \begin{pmatrix} Z_1' & F_1' \\ \vdots & \vdots \\ Z_T' & F_T' \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

ist. Der Kleinste-Quadrate-Schätzer kann jetzt über eine QR-Zerlegung

$$D = Q R \quad (4.57)$$

der Datenmatrix erfolgen.  $Q$  ist eine orthogonale Matrix<sup>29</sup> und  $R$  eine obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Die  $QR$  Zerlegung führt zu einer Cholesky-Zerlegung der Datenmatrix

$$\Pi = \begin{pmatrix} U & W' \\ W & V \end{pmatrix} = D' D = (QR)' QR = R' Q' QR = R' R = \begin{pmatrix} R'_{11} R_{11} & R'_{11} R_{12} \\ R'_{12} R_{11} & R'_{12} R_{12} + R'_{22} R_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Zerlegung lassen sich jetzt leicht die gesuchten Schätzer berechnen.

$$\hat{B} = WU^{-1} = (R_{11}^{-1} R_{12})' \quad (4.59)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-d-1} (V - WU^{-1}W') = \frac{1}{T-d-1} R'_{22} R_{22}. \quad (4.60)$$

Um die Parameter des Modells zu schätzen, reicht also eine  $QR$  Zerlegung der Datenmatrix  $D$  aus. Die geschätzten VAR(1) Modellparameter für die Nelson-Siegel Faktoren sind

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 0,00163 \\ -0,00136 \\ 0,00229 \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0,997 & 0,000475 & 0,00112 \\ 0,00198 & 0,995 & 0,00434 \\ -0,005 & 0,0182 & 0,971 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3,55E-07 & -3,07E-07 & -4,93E-07 \\ -3,07E-07 & 5,79E-07 & -6,32E-07 \\ -4,93E-07 & -6,32E-07 & 1,34E-05 \end{pmatrix}.$$

Die sehr kleinen Autokorrelationen der Residuen in Abbildung A.8 im Anhang weisen auf eine gute Modellschätzung hin.

### 4.2.5 Monte Carlo Simulation des VAR(1) Prozesses

Um den Prozess (4.52) zu simulieren<sup>30</sup>, muss der zufällige Rauschvektor

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ \epsilon_{3t} \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma)$$

in jedem Simulationsschritt  $t$  berechnet werden. Eine Möglichkeit besteht darin,  $\Sigma = R' R$  mittels einer Cholesky-Zerlegung in eine obere Dreiecksmatrix  $R$  zu

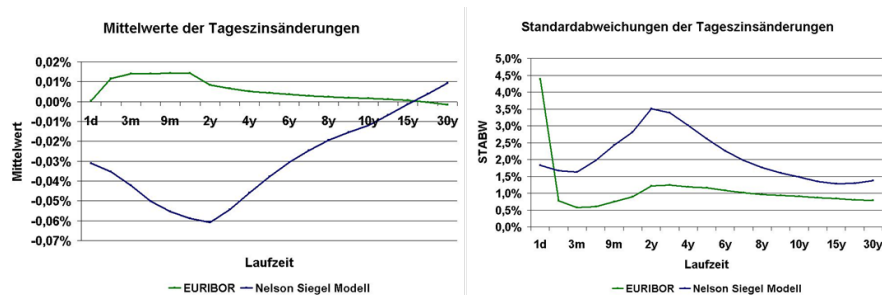
<sup>29</sup>d.h.  $Q' = Q^{-1}$

<sup>30</sup>Ein Ansatz zur Simulation von mehrdimensionalen Prozessen wird in [Gla04] S.91 beschrieben.

zerlegen und anschließend  $GR$  zu berechnen, wobei  $G \sim N(0, I_3)$  ein normalverteilter Zufallsvektor ist. Insgesamt werden 150 Pfade mit einer Simulationslänge von  $t = 400$  Tagen berechnet. Die berechneten Nelson-Siegel Faktoren werden anschließend in Gleichung (4.46) eingesetzt, um die neuen Zinskurven zu erhalten. Ausgehend von diesem Simulationsergebnis werden die berechneten Zinskurven auf ihre Realitätsnähe untersucht.

### 4.2.6 Analyse der simulierten Zinskurven

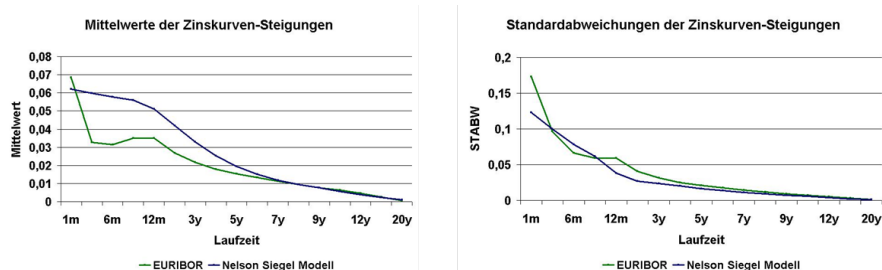
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen



**Abbildung 4.11:** Nelson-Siegel Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen

Bei den Mittelwerten der Tageszinsänderungen ist eine deutlich negative Tendenz zu beobachten. Dies liegt daran, dass die Startzinskurve über dem historischen Mittel liegt und das Nelson-Siegel Modell eine Art Mean Reverting Effekt auf die simulierten Zinsen ausübt. Die Standardabweichungen der simulierten Zinskurven sind größer als die historischen Zinsen. Dies ist ein Zeichen dafür, dass die Nelson-Siegel Zinsen im Verlauf volatiler sind als die EURIBOR Daten.

- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen

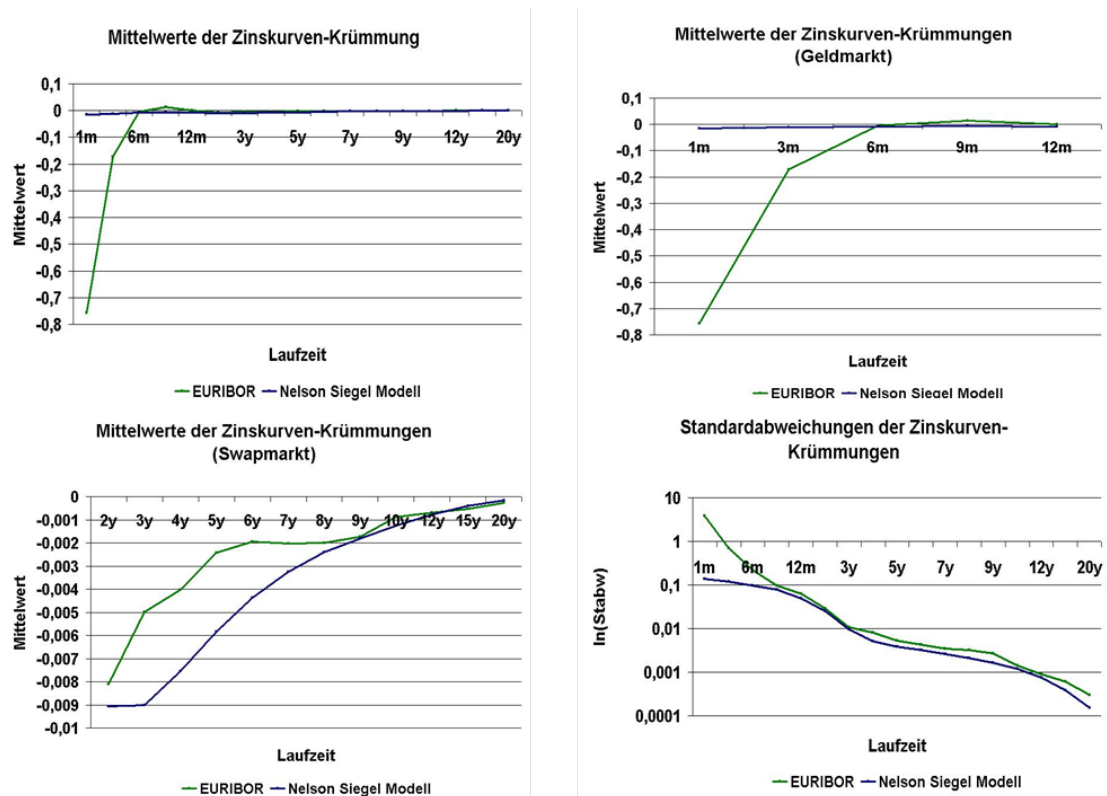


**Abbildung 4.12:** Nelson-Siegel Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen



Die Mittelwerte der Zinskurven-Steigungen der simulierten Zinsänderungen sind im kurzlaufenden Zinsbereich etwas größer im Vergleich zu den EURIBOR Daten. Im längerfristigen Bereich -ab dem 6y Zins- stimmen die Mittelwerte überein. Die Standardabweichungen der Nelson-Siegel Zinsänderungen zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den EURIBOR Zinsänderungen.

- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen



**Abbildung 4.13:** Nelson Siegel Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen.

Bei den Mittelwerten der Zinskurven-Krümmungen der simulierten Zinsänderungen ist im langfristigen Bereich -ab dem 8y Zins- eine weitestgehende Übereinstimmung mit den Referenzwerten zu beobachten. Im kurzfristigen Bereich gibt es große Abweichungen. Die Standardabweichungen hingegen erzielen eine große Übereinstimmung mit den EURIBOR Daten.

- Eigenwerte und Eigenvektoren

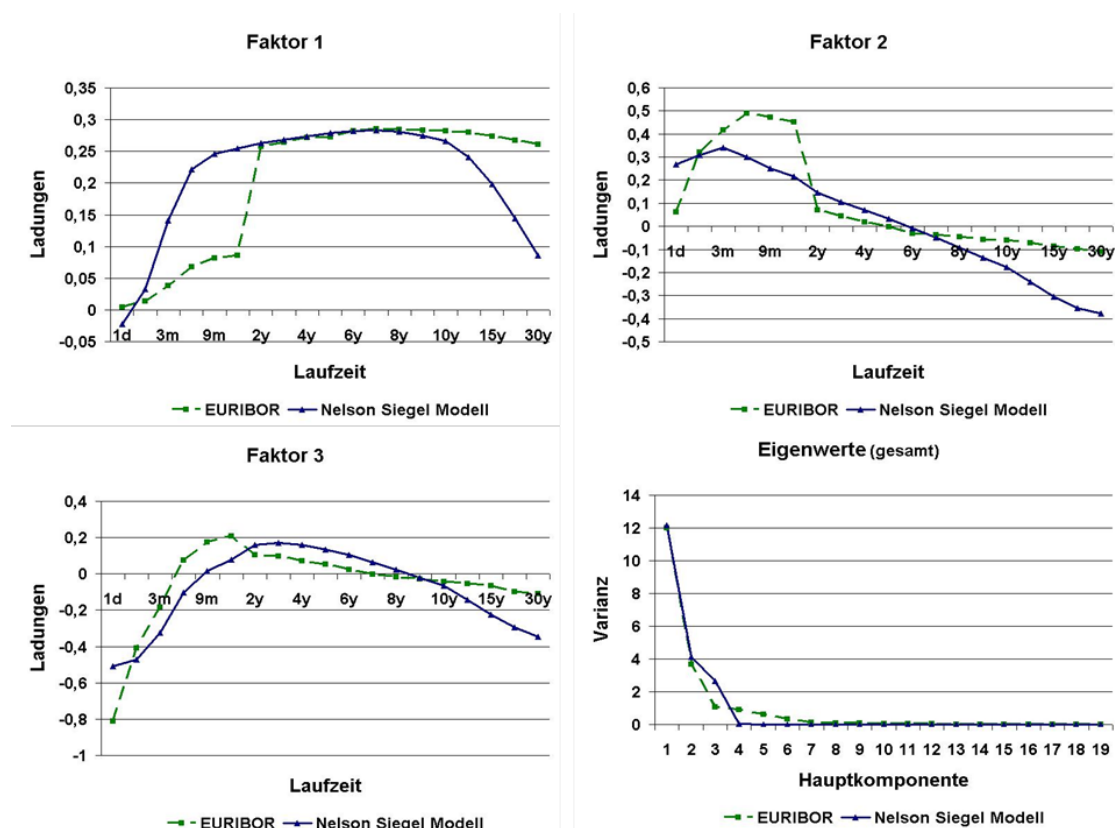


Abbildung 4.14: Nelson-Siegel Modell: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte (Faktoren) der simulierten Zinsen ähneln vom Verlauf her denen der EURIBOR Zinskurven, obwohl es insbesondere beim ersten und zweiten Faktor zu größeren Abweichungen im langfristigen und kurzfristigen Zinsbereich kommt. Die Variabilität liegt bei den simulierten Zinsen auf den ersten drei Faktoren. Nach den obigen Ausführungen ist auch nichts anderes zu erwarten, da das Nelson-Siegel Modell nur die Änderung von Level, Steigung und Krümmung einer Zinskurve darstellen kann.

Die guten Ergebnisse bei den Zinskurven-Steigungen sowie bei den Krümmungen und den Eigenwerten sind für die realitätsnahen optischen Ausprägungen der simulierten Zinskurven verantwortlich, wie später gezeigt wird.

- Varianzen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen

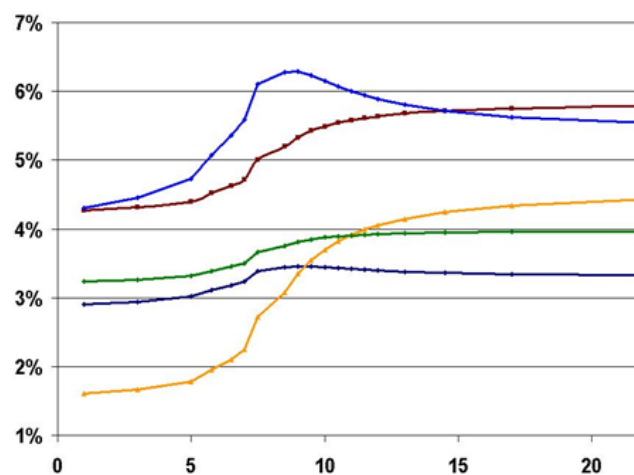
In den Abbildungen A.9 im Anhang befinden sich für ausgewählte Zinssätze die Varianzen der q-Tagesänderungen. Es wird auch hier schnell klar, dass die Volatilität mit Ausnahme des Eintageszinses der simulierten Zinsen größer ist als bei

den EURIBOR Zinsen. Im kurzfristigen Zinsbereich ist ein lineares Wachstum der Varianzen zu beobachten, das mit ansteigender Zinslaufzeit zu einem unterlinearen Wachstum wird. Ab dem 10y Zins kehrt sich dieses Verhalten um, bis beim 30y Zins wieder lineares Wachstum zu beobachten ist. Das tatsächliche Verhalten der historischen Zinskurven wird somit nicht abgebildet. Es wird sogar ein gegenläufiges Verhalten festgestellt.

- **Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen**

In Abbildung A.10 im Anhang sind die dazugehörigen Lag-1 Autokorrelationen zu sehen. Dort, wo man ein unterlineares Wachstum der Varianzen beobachten konnte, findet man nun negative Autokorrelationen. Ansonsten schwanken sie im Mittel um null herum. Das reale Verhalten der Autokorrelationen ist mit der Nelson-Siegel Simulation somit nicht abgebildet worden.

- **Simulierte Zinskurven<sup>31</sup>**



**Abbildung 4.15:** Nelson-Siegel Modell: Simulierte Zinskurven

In Abbildung 4.15 sind einzelne Stichproben der simulierten Zinsen abgebildet. Die unterschiedlich realistischen Ausprägungen der Zinskurvenformen sind deutlich zu erkennen. Betrachtet man die Zinssimulation im Zeitverlauf, wird auch die oben erwähnte große Volatilität sichtbar.

<sup>31</sup>Die simulierten Zinspfade im Zeitablauf sind unter <http://vids.myspace.com/index.cfm?fuseaction=vids.individual&videoid=44028895> zu sehen.

### 4.2.7 Zusammenfassung

Das dynamische Nelson-Siegel Modell ist ein in der Praxis weit verbreitetes Verfahren, um Zinskurven unter der realen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu simulieren. Es gibt eine Vielzahl von Einstellungsmöglichkeiten im Bereich der Modellparametersimulation, sowie einige strukturelle Weiterentwicklungen, deren Out-Of-Sample Ergebnisse hier nicht untersucht wurden. Das untersuchte 3-Faktor Modell basiert auf der Grundlage von Diebold und Lie (2006) und liefert gute Ergebnisse im Hinblick auf die Verteilungseigenschaften der Zinskurven-Steigungen, Krümmungen und Replizierung der Eigenwerte. Die resultierenden Zinskurven sind optisch sehr realitätsnah, wobei ein gutes Zinsmodell mehrere Ausprägungen modellieren sollte. Ein Nachteil stellt auch die hohe Volatilität und das nicht replizierte Verhalten der Varianzen und Autokorrelationen dar. Dieses Modell liefert auf jeden Fall bessere Zinskurven als das einfache CIR Modell und kann für lang- und kurzfristige Simulationen verwendet werden. Wie sich Modellveränderungen auf die Ergebnisse auswirken, lässt Platz für weitere Untersuchungen.

## 4.3 RMJBN Modell und das Extended RMJBN Modell

Das Modell wird von Rebonato *et al* (2005) beschrieben und wird in der weiteren Ausführung dieser Arbeit als RMJBN Modell bezeichnet. Dieses Modell entwickelt Zinskurven unter dem empirischen Maß und basiert auf der Grundidee des Block-Bootstrappings. Im Folgenden wird einleitend das Bootstrap Verfahren genauer beschrieben, welches auf Efron (1979a) zurückgeht. Anschließend wird das RMJBN Modell zuerst als ein nicht-parametrisches Modell eingeführt und in weiteren Schritten zu einem semi-parametrischen Modell erweitert. Die Ausführung wird um eine Kalibrierungsalgorithmus ergänzt, welche in der Originalarbeit nicht beschrieben wird. Ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit ist die Erweiterung des RMJBN Modells, um die Krümmungsverteilungen besser zu modellieren. Dadurch verbessern sich in einigen Fällen optisch die simulierten Zinskurven ohne andere Eigenschaften negativ zu beeinflussen. Des Weiteren wird eine einfache Möglichkeit aufgezeigt, wie man die Blocklänge und die Sprungwahrscheinlichkeit in einem Parameter zusammenfassen kann.

### 4.3.1 Bootstrap Verfahren: Ein Beispiel

Das Bootstrap Verfahren wurde entwickelt, um Rückschlüsse auf statistische Tests zu erhalten, wie z.B. die Berechnung von systematischen Fehlern, Standardfehlern und Konfidenzintervallen. Das Verfahren bietet den Vorteil einer Vereinfachung von oft komplizierten Berechnungen der traditionellen Statistiktheorie durch Computersimulationen. Ein einfaches Beispiel soll nun die Grundidee des Bootstrap Verfahrens erläutern.

In einer medizinischen Studie wurden aus einer Gruppe von 22072 Probanden im mittleren Alter einer Hälfte Aspirintabletten und der anderen Hälfte Placebos verschrieben. Nun wurde die Anzahl der Schlaganfälle über den Testzeitraum der beiden Gruppen mit folgendem Ergebnis untersucht:

	Schlaganfälle	Anzahl Probanden
<b>Aspiringruppe</b>	119	11037
<b>Placebogruppe</b>	98	11034

**Tabelle 4.4:** Ergebnisse der Aspirinstudie

Das Verhältnis beträgt

$$\hat{\Theta} = \frac{119/11037}{98/11034} = 1,21. \quad (4.61)$$

In anderen Worten, die Probanden aus der Aspiringruppe haben ca. 21% mehr Schlaganfälle als die Probanden der Placebogruppe. Das 95% Konfidenzintervall von  $\Theta$  beträgt

$$0,93 < \Theta < 1,59. \quad (4.62)$$

Somit ist nach diesem Ergebnis die Einnahme von Aspirin nicht signifikant harmlos im Zusammenhang mit der Ursache von Schlaganfällen. Wie zuverlässig ist dieses Ergebnis? Kann es sein, dass bei einem neuen Experiment ein ganz anderer Schätzer für  $\Theta$  herauskommt? Um diese Frage zu beantworten, kommt das Bootstrap Verfahren zur Berechnung des Standardfehlers ins Spiel. Dazu werden zuerst zwei Populationen aus Nullen und Einsen gebildet. In der ersten befinden sich 119 Einsen und  $11037 - 119 = 10918$  Nullen. In der zweiten sind 98 Einsen und  $11034 - 98 = 10936$  Nullen. Jetzt zieht man mit Zurücklegen 11037 Stichproben aus der ersten und 11034 Stichproben aus der zweiten Population. Die Gesamtheit aller Stichproben, die aus einer Population gezogen wird, nennt man Bootstrap Sample der Länge  $P$ . Dieses Verfahren wird beliebig oft wiederholt (z.B. 1000 mal)

und es ergeben sich daraus 1000 Bootstrap Replikationen<sup>32</sup> von  $\hat{\Theta}^*$ .

$$\hat{\Theta}^* = \frac{\text{Anzahl der Einsen im Bootstrap Sample der Population 1}}{\text{Anzahl der Einsen im Bootstrap Sample der Population 2}} \quad (4.63)$$

Es wird eine Standardabweichung von 0,17 berechnet und sie ist ein Schätzer für den Standardfehler von  $\hat{\Theta}$ . Der berechnete Schätzer in (4.61) ist dementsprechend nur ein wenig mehr als einen Standardfehler von dem neutralen Wert  $\hat{\Theta} = 1$  entfernt und somit kann dieser nicht ausgeschlossen werden. In diesem Fall besteht also kein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Einnahme von Aspirin und Schlaganfällen. Aus dem Bootstrapping-Ergebnis lässt sich auch ein 95% Konfidenzintervall ableiten. Dazu werden die Schätzwerte  $\hat{\Theta}$  der 1000 Replikationen der Größe nach aufsteigend geordnet. Man nimmt nun den 25ten und 975ten Schätzwert, welcher 0,93 und 1,6 beträgt. Diese Werte liegen sehr nahe an den theoretischen Werten in (4.62).

Das Beispiel ist in der Tat sehr einfach und die Stärken des Bootstrap Verfahrens werden vor allem erst bei komplexeren Schätzern  $\hat{\Theta}$  deutlich.

---

<sup>32</sup>auch Resampling genannt

## 4.3.2 Klassisches Bootstrap Verfahren

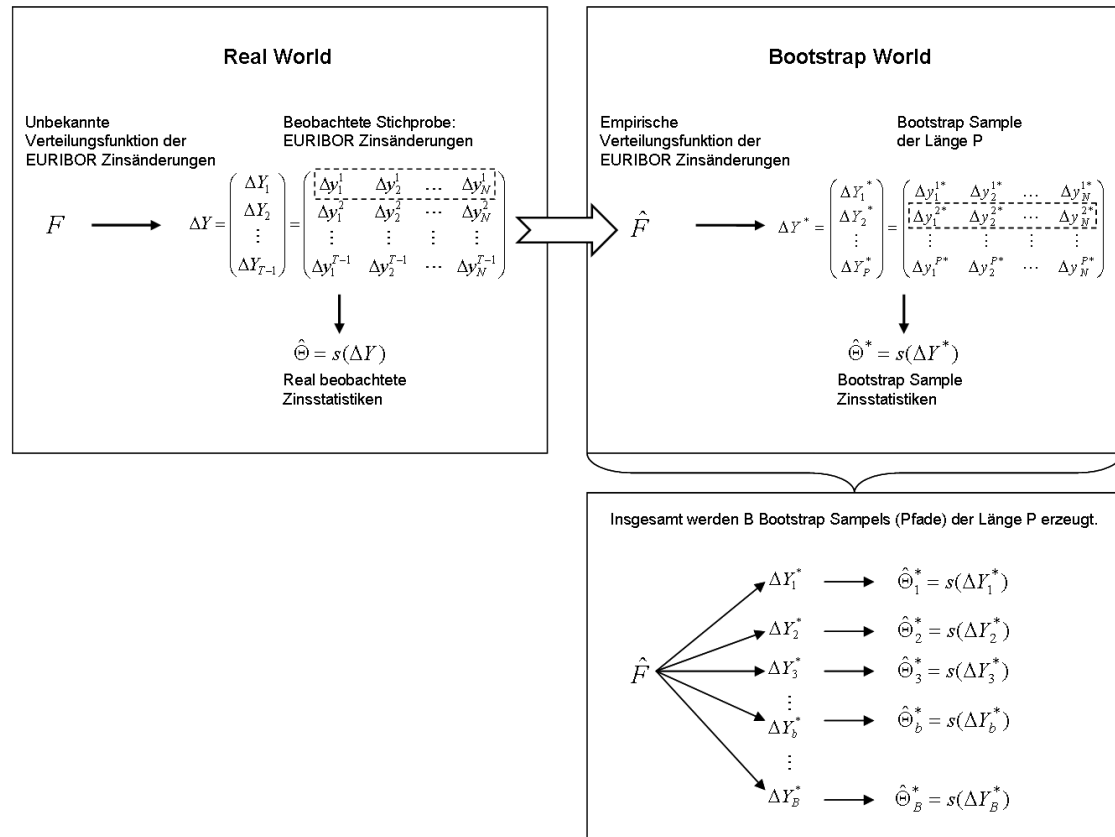


Abbildung 4.16: Schema-Diagramm des Bootstrap Verfahrens

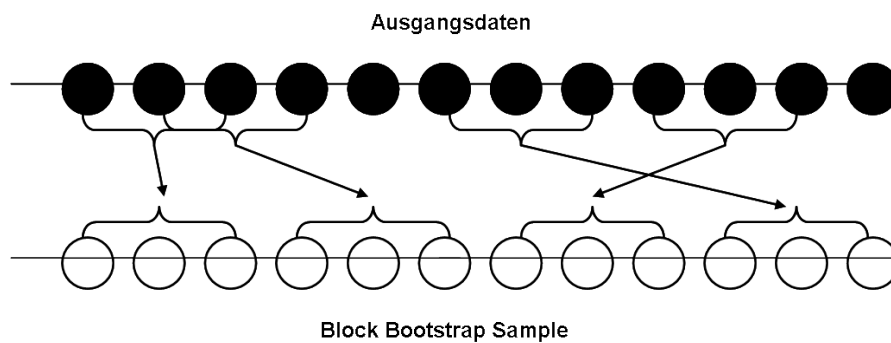
Die Abbildung 4.16 stellt das Schema des klassischen Bootstrap Verfahrens am Beispiel der EURIBOR Zinsänderungen dar. Im Kasten „Real World“ wird angenommen, dass die tatsächlich beobachtete Stichprobe der Zinsänderungen, berechnet aus den realen Zinsstrukturkurven, von einer unbekannten Verteilungsfunktion  $P$  zufällig erzeugt wurde.  $\hat{\Theta}$  ist ein Schätzer einer beliebigen Statistik, die Funktion  $s$  kann beispielsweise den Mittelwert oder die Varianz darstellen. Im einführenden Beispiel bestand die beobachtete Stichprobe aus den Ergebnissen der Aspirinstudie. Der große Pfeil in der Abbildung 4.16 markiert den Wechsel von der realen Welt in die Bootstrap Welt. Die in der realen Welt unbekannte Verteilungsfunktion  $P$  wird durch die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{P}$  aus der beobachteten Stichprobe geschätzt und durch

$$F_j(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I \{ \Delta y_j^t \leq x \} \quad j = 1, \dots, N \quad (4.64)$$

definiert.  $I\{A\}$  steht für die Indikatorfunktion der Menge  $A$ . Ein Bootstrap Sample<sup>33</sup>  $\Delta Y^*$  der Länge  $P$  wird durch zufälliges<sup>34</sup>  $P$ -maliges Ziehen mit Zurücklegen aus den Originaldaten  $\Delta Y$  gewonnen und ist somit eine durch die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{P}$  generierte Stichprobe. Im Falle der Zinsänderungsmatrix werden die einzelnen Zeilen  $\Delta Y_t$  aus  $\Delta Y$  gezogen und zu einer neuen Matrix  $\Delta Y^*$  zusammengefügt. Aus jedem dieser Bootstrap Samples kann man wiederum einen Schätzer  $\hat{\Theta}^*$  für beliebige Statistiken berechnen. Wiederholt man dieses Verfahren  $B$ -mal<sup>35</sup>, lässt sich beispielsweise wie am Anfang in der Medikamentenstudie der Standardfehler des Schätzers (4.61) berechnen.

Im Folgenden wird das klassische Bootstrap Verfahren etwas modifiziert, um damit im nächsten Schritt ein Zinsmodell unter dem empirischen Maß aufzustellen.

### 4.3.3 Block Bootstrap Verfahren



**Abbildung 4.17:** Schema-Diagramm des Block Bootstrap-Verfahrens

Das oben beschriebene Bootstrap Verfahren lässt sich bei autokorrelierten Zeitreihen nicht einsetzen, da es die Autokorrelation der Ausgangsdaten in den Bootstrap Samples nicht repliziert. Daher haben Liu und Singh (1988) sowie Künsch (1989) unabhängig voneinander das Moving Block Bootstrap Verfahren entwickelt. Wie in Abbildung 4.17 zu sehen ist, wird die ursprüngliche Zeitreihe in einzelne Blöcke unterteilt. Anschließend werden die einzelnen Blöcke zufällig<sup>36</sup> mit Zurücklegen gezogen und aneinander geheftet, um die neue Bootstrap Zeitreihe zu generieren. Die Blocklänge  $b$  sollte so groß gewählt werden, dass die einzelnen Beobachtungen in der Ausgangszeitreihe,  $b$  Einheiten entfernt voneinander, in etwa unabhängig

<sup>33</sup>oder auch Pfad genannt.

<sup>34</sup>diskrete Gleichverteilung auf  $(1, \dots, T)$

<sup>35</sup>Im Schnitt reichen 50-200 Samples vgl. [Efr93]. Für Berechnungen von Konfidenzintervallen müssen mehr Samples generiert werden.

<sup>36</sup>diskrete Gleichverteilung auf  $(1, \dots, T - b)$

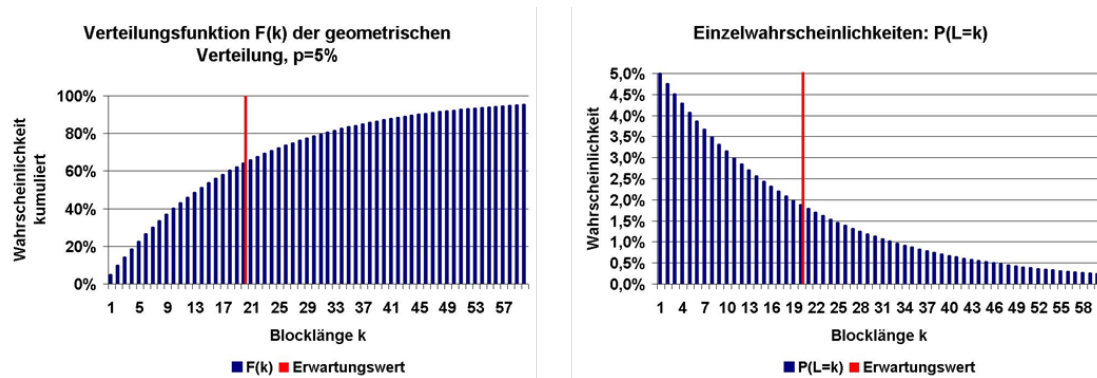


sind. Durch das Ziehen der einzelnen Blöcke bleibt in der Bootstrap Zeitreihe die Korrelation der  $b$  Beobachtungen erhalten.

Politis und Romano (1994) stellen eine Weiterentwicklung des Moving Block Bootstrap Verfahrens vor, um bei stationären Zeitreihen die Stationarität in den Bootstrap Samples zu erhalten. Aufgrund dieser Eigenschaft wird es in der Literatur das **stationäre Bootstrap Verfahren** genannt. Dabei werden die Blocklängen nicht fixiert, sondern die Länge der einzelnen Blöcke  $L_i \sim \text{Geo}(p)$  ist geometrisch mit dem Parameter  $p \in (0, 1)$  verteilt. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Blocklänge  $k = 1, 2, \dots$  beträgt  $P(L_i = k) = p(1 - p)^{k-1}$  und für die mittlere Blocklänge gilt:

$$\begin{aligned} E(L_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1 - p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p(1 - p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1 - p)^k + \sum_{k=1}^{\infty} p(1 - p)^{k-1} \\ &= (1 - p)E(L_i) + 1 \Rightarrow E(L_i) = \frac{1}{p} = \bar{b} \end{aligned} \quad (4.65)$$

In den folgenden beiden Abbildungen sind die Verteilungsfunktion  $F(k)$  und die einzelnen Verteilungen  $P(L_i = k) = p * (1 - p)^{k-1}$  für  $p = 5\%$  der geometrischen Verteilung dargestellt. Der Erwartungswert  $E(L_i) = 20$  ist durch den roten Balken gekennzeichnet.



**Abbildung 4.18:** Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung mit  $p = 5\%$

Beispielsweise bedeutet  $F(20) = P(L_i \leq 20) = 64,1\%$ , dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 64,1% die Blocklänge kleiner gleich 20 Tage ist.  $P(L_i = 20) = 5\% * (95\%)^{19} = 1,9\%$  besagt hingegen, dass die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Blocklänge von genau 20 Tagen bei 1,9% liegt. Die Verteilungsfunktion berechnet sich durch das Aufsummieren der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$F(k) = P(L_i \leq k) = p \sum_{i=1}^k q^{i-1} = p \sum_{i=0}^{k-1} q^i = p \frac{q^k - 1}{q - 1} = 1 - q^k = 1 - (1 - p)^k. \quad (4.66)$$

Die Wahl der erwarteten Blocklänge spielt bei dem Verfahren eine wichtige Rolle.

#### OPTIMALE BLOCKLÄNGE

Eine Möglichkeit, die optimalen mittleren Blocklängen automatisch mit einem Algorithmus zu bestimmen, wird von Politis und White (2008) beschrieben. Es hat sich herausgestellt, dass die mittleren Blocklängen, die dieser Algorithmus liefert, einen sehr guten Indikator für Blocklängenwahl im späteren RMJBN Modell bieten. Aufgrund dessen wird im Folgenden die Idee des Algorithmus kurz vorgestellt und auf die Matrix der EURIBOR Zinsänderungen angewendet<sup>37</sup>.

Sei  $\langle Y_P^* \rangle = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^P Y_t^*$  der Mittelwert eines Bootstrap Pfades. Der dazugehörige Schätzer für die Varianz des Mittelwerts sei gegeben durch  $\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2$ . Dieser Wert ist abhängig von der Wahl der mittleren Blocklänge  $\bar{b}$ . Der optimale Wert für  $\bar{b}$  wird nun so gewählt, dass der mittlere quadratische Fehler

$$\text{MSE}(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2) = E[(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2 - \sigma^2)] = \text{Var}(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2) + \text{Bias}^2(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2) \quad (4.67)$$

minimal wird, wobei die Verzerrung von  $\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2$ , d.h die mittlere Abweichung des Schätzers von dem zu schätzenden Wert  $\sigma^2$  gegeben ist durch:  $\text{Bias}(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2) = E(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2) - \sigma^2$ . Lahiri (1999) gibt eine Approximation von  $\text{Var}(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2)$  und  $\text{Bias}^2(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2)$  an<sup>38</sup>, welche zur Herleitung von  $\text{MSE}_{\text{opt}} = \min_{\bar{b}} \text{MSE}(\hat{\sigma}_{\bar{b}}^2)$  verwendet wird. Die Herleitung und die detaillierte Beschreibung des Ergebnisses sind in Politis und White (2008) zu finden. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse bezüglich der Tageszinsänderungen für alle verfügbaren Zinslaufzeiten dargestellt.

<b>1d</b>	<b>1w</b>	<b>1m</b>	<b>2m</b>	<b>3m</b>	<b>4m</b>	<b>5m</b>
58,2	43,1	8,2	11,9	44,1	41,9	34,3
<b>6m</b>	<b>7m</b>	<b>8m</b>	<b>9m</b>	<b>10m</b>	<b>11m</b>	<b>12m</b>
33,9	29,3	27,6	7,9	7,3	6,7	6,3
<b>1,5y</b>	<b>2y</b>	<b>3y</b>	<b>4y</b>	<b>5y</b>	<b>6y</b>	<b>7y</b>
3,5	3,1	1,9	0,7	1,9	1,9	1,8
<b>8y</b>	<b>9y</b>	<b>10y</b>	<b>12y</b>	<b>15y</b>	<b>20y</b>	<b>30y</b>
2,3	2,4	2,2	2,4	3,0	2,9	2,7

**Tabelle 4.5:** Optimale mittlere Blocklängen für die EURIBOR Tageszinsänderungen

Es fällt auf, dass die optimalen mittleren Blocklängen im Geldmarktbereich deutlich länger sind als im Swapmarktbereich. Auffällig sind die 1m und 2m Zinsen,

<sup>37</sup>Eine Matlab Implementierung wird unter <http://www.economics.ox.ac.uk/members/andrew.patton/code.html> bereitgestellt.

<sup>38</sup>[Pol08] verwenden eine korrigierte Version der Ergebnisse.

die im Vergleich zu ihren Nachbarzinssätzen nur eine optimale Blocklänge von jeweils 8,2 und 11,9 Tagen aufweisen. Inwieweit diese Ergebnisse für das Zinsmodell verwendet werden können, wird später erläutert.

#### 4.3.4 RMJBN-Modellansätze

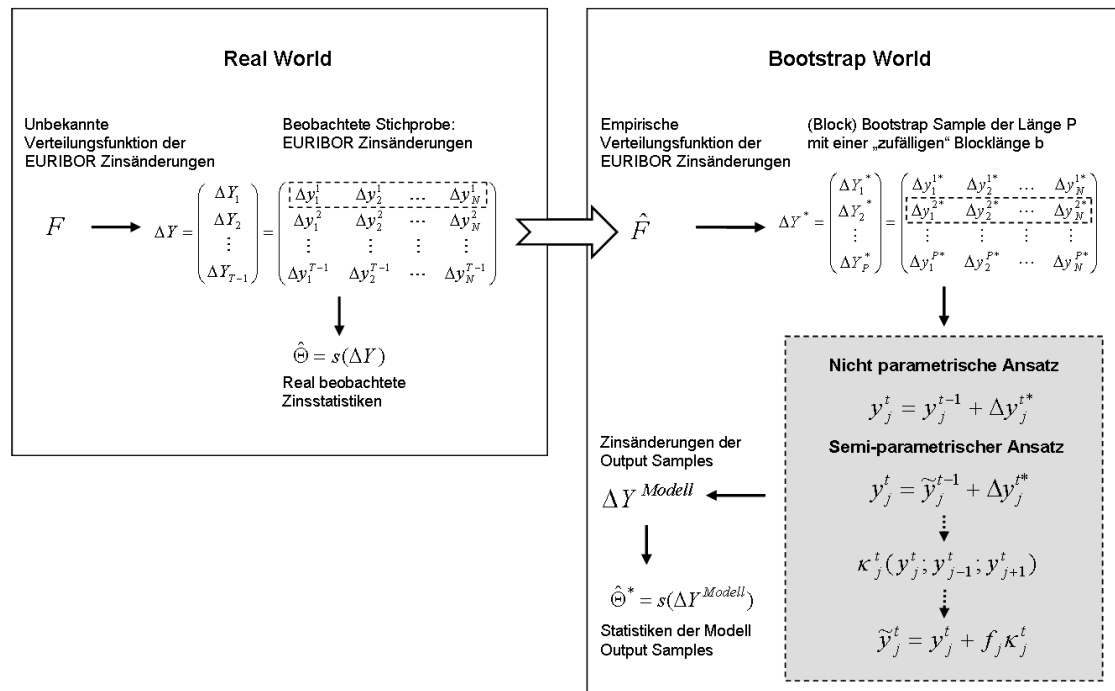


Abbildung 4.19: Schema-Diagramm der RMJBN-Modellansätze

Rebonato *et al* (2005) entwickelten ein Zinsmodell basierend auf dem Bootstrap Verfahren. Die beobachteten Zinsdaten stellen demnach eine einzelne Realisation aller möglichen Zinskurvenentwicklungen dar. Das Modell wird somit an die tatsächlich beobachteten Statistiken  $\hat{\Theta}$  kalibriert. Um die Statistik der Krümmungen zu replizieren, müssen zusätzliche Parameter in die Modellgleichung eingefügt werden. Für die Auswertungen werden insgesamt  $B = 150$  Pfade mit jeweils  $P = 400$  Tagen<sup>39</sup> simuliert. Von jedem dieser Pfade werden mittels der Algorithmen die neuen Zinskurven gebildet. Von diesen Zinskurven aus werden zum Vergleich mit historischen Werten die gewünschten Statistiken  $\hat{\Theta}^*$  berechnet. Die Abbildung 4.19 zeigt das allgemeine Schema dieses Modells. In den nächsten Abschnitten wird das Modell schrittweise untersucht, um die einzelnen Spezifikationen zu motivieren. In der Tabelle 4.6 sind die ersten drei Modellversionen nach Rebonato *et al* (2005) samt ihren replizierenden Eigenschaften dargestellt. Ein „+“ bzw. „++“ bedeutet,

<sup>39</sup>auch andere Schrittweiten wie z.B. wöchentlich oder monatlich sind denkbar

das Modell erfüllt diese Eigenschaft gut bzw. besonders gut und ein „-“ bedeutet das Gegenteil. Die Spalte des Extended RMJBN Modells wird im nächsten Abschnitt ergänzt.

Version 1	Version 2	Version 3	Extended	Eigenschaften
+	+	+		Statistik: Tageszinsänderungen
+	+	+		Eigenwerte und Eigenvektoren
-	-	-		Statistik: Steigungen
-	-	+	( $\sigma$ )	Statistik: Krümmungen
-	+	+		Varianzen der q-Tagesänderungen
-	+	+		Lag-1 Autokorr. q-Tagesänderungen
-	-	+		Plausibles Aussehen

**Tabelle 4.6:** Übersicht der einzelnen Modellversionen mit ihren Eigenschaften

### Nichtparametrisches RMJBN Modell

#### MODELL VERSION 1

Der einfachste Ansatz besteht darin, aus den beobachteten EURIBOR Zinsänderungen<sup>40</sup>  $\Delta Y$  einzelne Zinsänderungszeilenvektoren  $\Delta Y_t$  mit einer gleichverteilten Wahrscheinlichkeit<sup>41</sup> auf dem Intervall  $[1, T - 1]$  zu ziehen. Die gezogenen Vektoren bilden einen Bootstrap Pfad z.B.:

$$\Delta Y^* = \begin{pmatrix} \Delta Y_{120}(1) \\ \Delta Y_{230}(2) \\ \Delta Y_{440}(3) \\ \vdots \\ \Delta Y_{46}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta Y_1^* \\ \Delta Y_2^* \\ \Delta Y_3^* \\ \vdots \\ \Delta Y_P^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y_1^{1*} & \Delta y_2^{1*} & \dots & \Delta y_N^{1*} \\ \Delta y_1^{2*} & \Delta y_2^{2*} & \dots & \Delta y_N^{2*} \\ \Delta y_1^{3*} & \Delta y_2^{3*} & \dots & \Delta y_N^{3*} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta y_1^{P*} & \Delta y_2^{P*} & \dots & \Delta y_N^{P*} \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

$\Delta y^t$  bezeichnet die Differenz von Logarithmen und somit die relativen Zinsänderungen. In dem gesamten Modell wird nur mit logarithmierten Zinsen gearbeitet. Mit den gewürfelten Zinsänderungen berechnen sich die Zinskurven rekursiv über die Gleichung

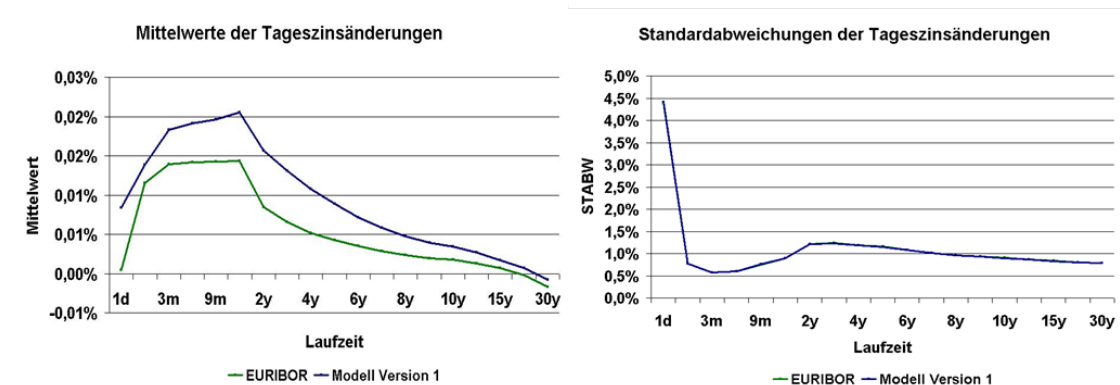
$$y_j^t = y_j^{t-1} + \Delta y_j^{t*} \quad t = 1, \dots, P \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.69)$$

<sup>40</sup>hier: EURIBOR Datensatz von Februar 1999 bis Juli 2008 d.h.  $T - 1 = 2459$  Tage.

<sup>41</sup>Für die Implementierung wurde der Mersenne Twister Algorithmus <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/VERSIONS/EXCEL/excel.html> verwendet. Das gesamte RMJBN Modell wurde in VBA implementiert. Der dazugehörige Code ist von der Deutschen Bank AG urheberrechtlich geschützt und kann in dieser Arbeit nicht veröffentlicht werden.

$y_j^0$ ,  $j = 1, \dots, N$  bezeichnet die Startzinskurve.<sup>42</sup> Welche Charakteristiken werden durch die erste Modellversion abgebildet?

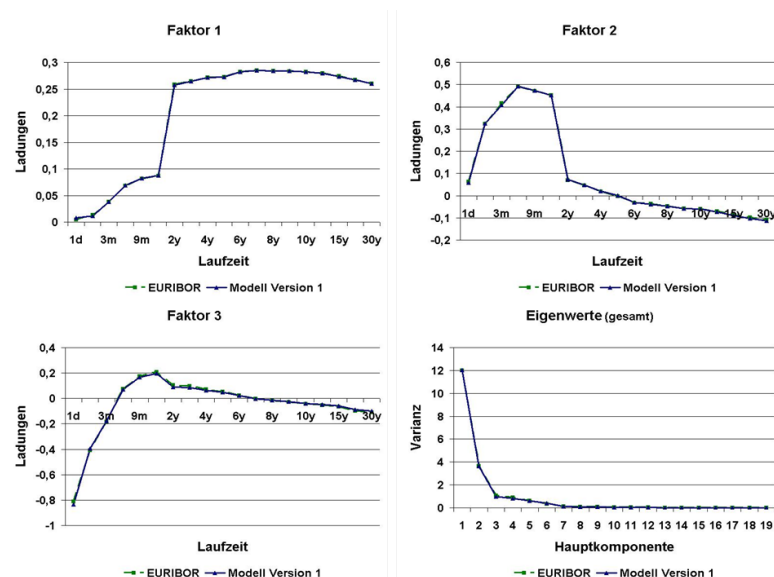
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen



**Abbildung 4.20:** RMJBN Modell Version 1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung

Die Abbildung 4.20 zeigt die ersten beiden Momente der Verteilungen der Tageszinsänderungen. Bei den Mittelwerten ist eine leichte Verzerrung zu beobachten. Die Standardabweichungen werden (asymptotisch) exakt repliziert. Dies zeigt deutlich, dass 150 Pfade für die Konvergenz völlig ausreichend sind.

- Eigenwerte und Eigenvektoren



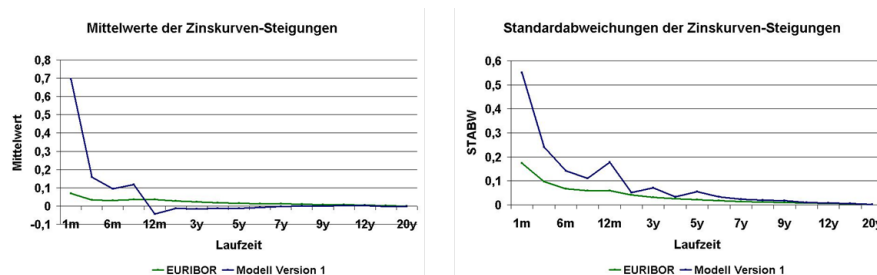
**Abbildung 4.21:** RMJBN Modell Version 1: Eigenwerte und Eigenvektoren

<sup>42</sup>In den folgenden Analysen ist, soweit nicht anders erwähnt, der Startzeitpunkt der 4.7.2008.

Die Eigenwerte und Eigenvektoren werden ebenfalls (asymptotisch) exakt abgebildet. Das liegt an den Änderungsvektoren  $\Delta Y^{\text{Modell}}$ , die identisch zu den realen Änderungsvektoren  $\Delta Y^*$  sind. Bei ausreichend langen Zinskurvenentwicklungen werden die historischen Änderungsvektoren durch die Änderungsvektoren des Modells repräsentiert. Daraus folgt, dass die Kovarianzmatrix des Modells im Verlauf asymptotisch der empirischen Kovarianzmatrix entspricht und somit auch die Eigenwerte und Eigenvektoren identisch sind. Natürlich kann es bei jedem einzelnen Pfad zu Abweichungen kommen, da man pro Pfad nur eine kleine endliche Stichprobe der Änderungsvektoren zieht. Betrachtet man das Eigensystem über alle 150 Pfade, mittelt sich dieser Effekt aus.

Die Verwendung des Eigensystems spielt vor allem bei Mehrfaktor-No-Arbitrage Modellen eine wichtige Rolle. Beim LIBOR Markt Modell werden z.B. die impliziten Modellkorrelationen an die der realen Forwardraten kalibriert, um die ersten Eigenwerte und Eigenvektoren abzubilden. Das Arbeiten mit dem gesamten Eigensystem hingegen ist sehr rechenaufwendig. Diese Auswertung zeigt, dass im Hinblick auf die Modellierung realer Zinskurven das Replizieren des gesamten Eigensystems nicht ausreicht. Die unrealistischen Zinskurven in Abbildung 4.24 bestätigen dies.

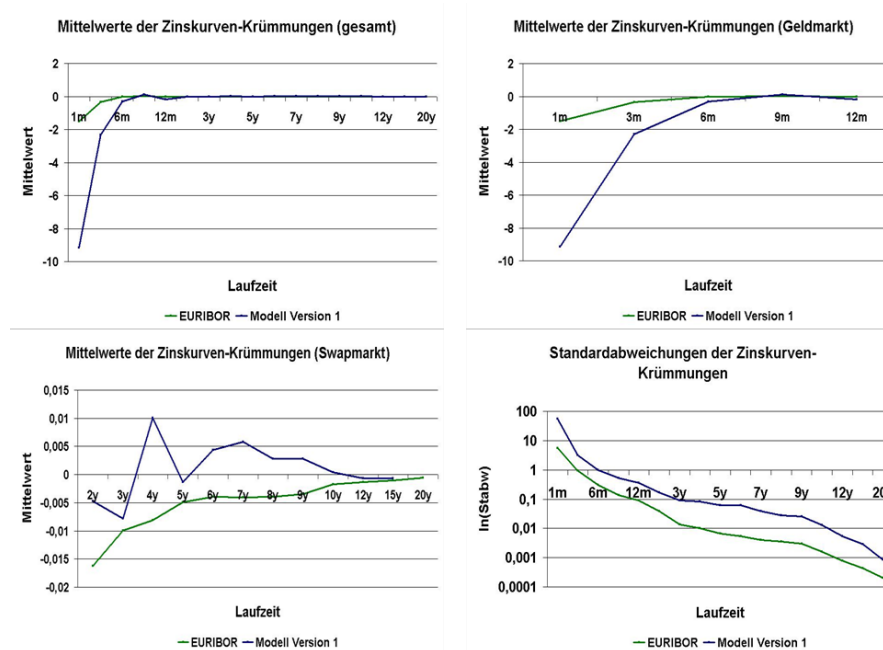
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen



**Abbildung 4.22:** RMJBN Modell Version 1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen

Bei den Statistiken der Zinskurven-Steigungen ist im kurzfristigen Zinsbereich eine Abweichung der simulierten Werte von den empirischen Daten zu beobachten. Im langfristigen Zinsbereich nähern sich die simulierten Werte den historischen Werten an. Relevanter ist aber die Frage nach der Übereinstimmung der Zins-Krümmungen.

- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen



**Abbildung 4.23:** RMJBN Modell Version 1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen

Es ist deutlich zu sehen, dass die Mittelwerte und Standardabweichungen der simulierten Zinskurven-Krümmungen nicht mit den historischen Werten übereinstimmen. Infolge dessen sehen die simulierten Zinskurven in Abbildung 4.24 sehr unrealistisch aus. Die dritte Modellversion behebt dieses Problem durch das Hinzufügen eines zusätzlichen Parameters, mit dessen Hilfe man die simulierten Zinskurven-Krümmungen an die historischen Krümmungen kalibrieren kann.

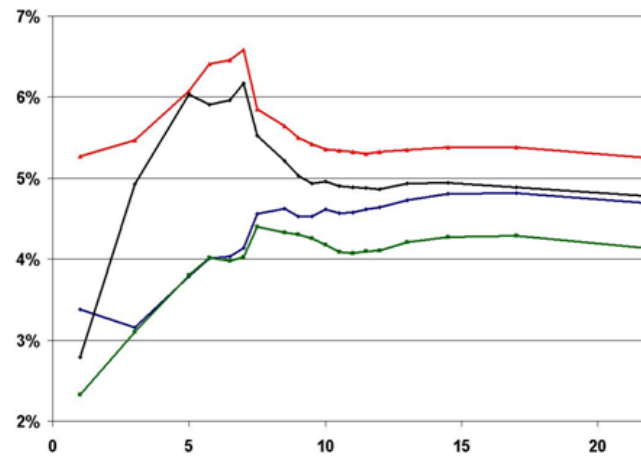
- Varianzen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen

Bei den Varianzen der q-Tagesänderungen in Abbildung A.11 ist ein linearer Anstieg zu beobachten. Die erste Version des Modells produziert also unabhängige und identisch verteilte Zuwächse ähnlich wie das CIR Modell.

- Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen

Die in Abbildung A.12 gezeigten Lag-1 Autokorrelationen bestätigen das obige Ergebnis, da sie im Mittel offensichtlich um null herum schwanken.

- Simulierte Zinskurven



**Abbildung 4.24:** RMJBN Modell Version 1: Simulierte Zinskurven

Zum Schluss werden einzelne Zinskurven betrachtet, die bei der Simulation entstanden sind. Es zeigt sich, dass die Kurven, insbesondere im kurzen Zinsbereich, zu wellig und optisch weit von den bekannten EURIBOR Zinskurven entfernt sind. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die resultierenden Zinskurven aus dem einfachen Bootstrapping Modell die Statistiken der Tageszinsänderungen und die Eigenwerte und Eigenvektoren asymptotisch replizieren. Um die noch fehlenden Eigenschaften in das Modell einzubauen, wird das Modell in drei weiteren Schritten modifiziert, ohne idealerweise die bereits vorhandenen Eigenschaften negativ zu beeinflussen.

#### MODELL VERSION 2

Die zweite Modellversion entsteht durch das Anwenden des Block Bootstrap Verfahrens, um die serielle Struktur der Zinskurven zu modellieren. Die rekursive Modellstruktur aus Gleichung (4.69) bleibt erhalten und es wird nur die Generierung der Bootstrap Pfade (4.68) modifiziert. Durch das Einführen einer fixen Blocklänge  $b$  und einer Sprungwahrscheinlichkeit  $p$ , um aus den Blöcken herauszuspringen, enthält ein Bootstrap Pfad  $\Delta Y^*$  einzelne Blöcke mit einer zufälligen Länge  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, x$ . Sobald die Länge  $b$  eines Blocks erreicht ist bzw. der Block mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p$  frühzeitig verlassen wird, springt man gleichverteilt zu einem neuen Startpunkt in den Ursprungsdaten  $\Delta Y$  und beginnt neu. Im folgenden Beispiel (4.70) steht  $x$  für die zufällige Anzahl der einzelnen Blöcke  $L_i$ , aus denen der Bootstrap Pfad der Länge  $P$  zusammengefügt wird. In den Klammern



steht die aktuelle Vektorlänge.

$$\Delta Y^* = \begin{pmatrix} \Delta Y_{120}(1) \\ \vdots \\ \Delta Y_{120+L_1-1}(L_1) \\ \Delta Y_{32}(L_1+1) \\ \vdots \\ \Delta Y_{32+L_2-1}(L_1+L_2) \\ \vdots \\ \Delta Y_{534+L_x-1}(P = \sum_{i=1}^x L_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta Y_1^* \\ \vdots \\ \Delta Y_{L_1}^* \\ \Delta Y_{L_1+1}^* \\ \vdots \\ \Delta Y_{L_1+L_2}^* \\ \vdots \\ \Delta Y_{P=\sum_{t=1}^x L_t}^* \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Rebonato *et al* schlagen eine Blocklänge von  $b = 40$  Tagen mit einer Sprungwahrscheinlichkeit von  $p = 5\%$  oder alternativ eine Blocklänge von  $b = 60$  mit einer Sprungwahrscheinlichkeit von  $p = 10\%$  vor. Als Datengrundlage dienen hier täglich beobachtete US-LIBOR Kurven von 1993 bis 2001. Nyholm und Rebonato (2007) hingegen wählen eine maximale Blocklänge von  $b = 50$  Tagen mit einem Minimum von 5 Tagen und einer Sprungwahrscheinlichkeit von  $p = 10\%$ . Bei den zugrundeliegenden Daten handelt es sich ebenfalls um tägliche US-LIBOR Kurven von 1986 bis 2004. Es wird kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung dieser Parameter erwähnt. Das hier verwendete Verfahren ist eine Variante des am Anfang vorgestellten stationären Bootstrap Verfahrens, bei dem die zufälligen Blocklängen  $L_i$  geometrisch verteilt sind. Die geometrische Verteilung wird bei dem Zinsmodell nach oben gekappt, also im Sinne einer Zufallsvariablen  $Y = \min(L_i, b)$  mit  $L_i \sim \text{Geo}(p)$ . In diesem Fall besitzt  $Y$  die Verteilung:

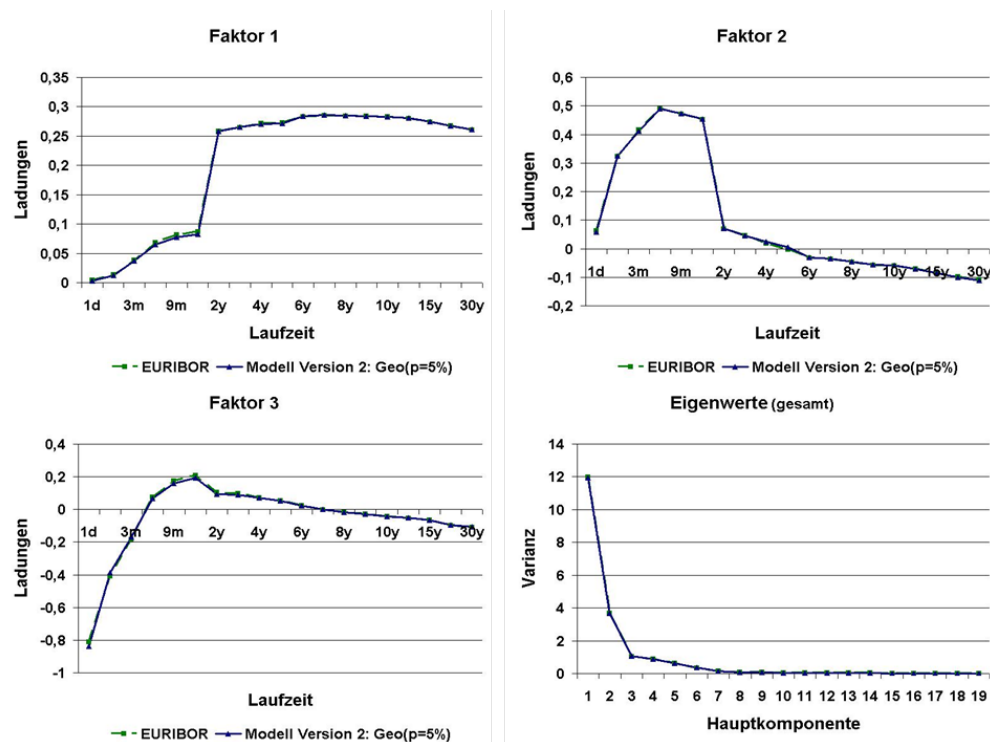
$$P(Y = k) = \begin{cases} P(L_i = k) = p(1-p)^{k-1} & \text{für } 1 \leq k \leq b-1 \\ \sum_{k=b}^{\infty} P(L_i = k) = (1-p)^{b-1} & \text{für } k = b \\ 0 & \text{für } k > b \end{cases} \quad (4.71)$$

d.h., die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse  $L_i \geq b$  fällt auf den Wert  $Y=b$ . Mit dieser Verteilung lässt sich nun der Erwartungswert (mittlere Blocklänge) berechnen.

In der Tabelle 4.7 sind die mittleren Blocklängen der erwähnten Parameter aufgelistet. Über diese Werte lassen sich die Parameter  $p$  der geometrischen Verteilung berechnen. Da bei der geometrischen Verteilung mit dem Parameter  $p$  der Erwartungswert  $\frac{1}{p}$  beträgt, lässt sich die mittlere Blocklänge von z.B.  $\bar{b} = 17$  in die



- Eigenwerte und Eigenvektoren

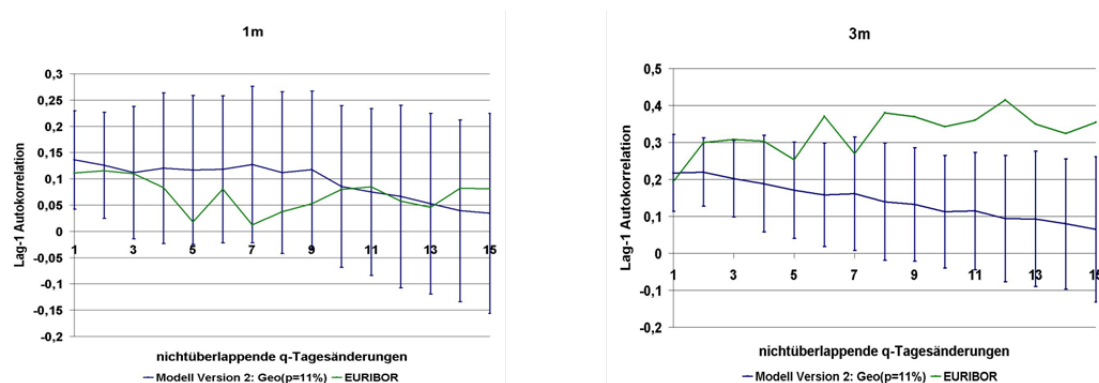


**Abbildung 4.26:** RMJBN Modell Version 2  $[\text{Geo}(p), p = 5\%]$ : Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Hinzunahme der Blöcke beeinflusst weder die Kovarianzmatrix noch die Varianzen der Tagesänderungen, sodass alle Eigenwerte und Eigenvektoren erhalten bleiben.

Im Vergleich zur ersten Modellversion werden nun durch das Einführen der Blöcke die seriellen Eigenschaften der Zinskurven repliziert. Dies zeigt sich in den Auswertungen der **Varianzen und den Lag-1 Autokorrelationen der q-Tagesänderungen**. In den Abbildungen A.13 bis A.24 im Anhang werden die Varianzen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen sowie die Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen mit den Einstellungen zur Modellierung der Blocklängen aus Tabelle 4.7 dargestellt. Es zeigt sich, dass die Modellvarianzen ab dem 1m Zins mit einem überlinearen Wachstum beginnen und im mittleren Laufzeitbereich in ein unterlineares Wachstum übergehen. So ist es auch in den realen Daten zu beobachten. Auch das unterlineare Wachstum der Varianzen beim Eintageszins wird repliziert. Über alle Blocklängeneinstellungen hinweg ist dieses Ergebnis sehr stabil, d.h. bei einer mittleren Blocklänge von  $\bar{b} = 10$  sowie bei einer mittleren Blocklänge von  $\bar{b} = 50$  gibt es kaum Abweichungen

der Ergebnisse<sup>43</sup>. Das Ergebnis der Varianzen spiegelt sich auch in den Auswertungen der Autokorrelationen wieder. Mit Hilfe des Block Bootstrappings schwanken die Lag-1 Autokorrelationen nicht mehr durchschnittlich um Null herum, sondern weisen im Mittel die Tendenz der historischen Daten auf. Im Gegensatz zu den Varianzen sieht man hier deutlich: Je länger die mittlere Boxlänge ist, desto besser werden die historischen Autokorrelationen getroffen. Vor allem im Geldmarktbereich bis zum 1y Zins werden lange Blocklängen benötigt, um die historischen Autokorrelationsverläufe tendenziell abbilden zu können. Je länger die Zinslaufzeiten werden, desto kleiner kann die mittlere Blocklänge gewählt werden (vgl. Abbildung A.20 und A.24). Dieses Ergebnis ist nicht neu, da bereits die optimalen mittleren Blocklängen in Tabelle 4.5 auf diese Struktur hindeuten. Je länger die Zinslaufzeiten werden, desto kürzer werden die optimalen Blocklängen. Wenn die Werte in Tabelle 4.5 einen Hinweis darauf geben, müsste bereits eine mittlere Blocklänge von 9 Tagen die Autokorrelationsstruktur des 1m Zins adäquat abbilden. Dies trifft jedoch nicht auf den 3m Zins zu, da hier eine optimale Länge von 44 Tagen berechnet wurde.



**Abbildung 4.27:** RMJBN Modell Version 2 [Geo(p),  $p = 11\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen

In Abbildung 4.27 sind die Lag-1 Autokorrelationen für den 1m sowie 3m Zins dargestellt. Die Einstellung des Modells wurde so gewählt, dass die mittlere Blocklänge 9 Tage lang ist. Wie erwartet, wird die Autokorrelationsstruktur des 1m gut repliziert, wohingegen es beim 3m Zins starke Abweichungen gibt. Die Werte, die mit dem automatischen Blocklängen-Algorithmus berechnet wurden, sind also ein

<sup>43</sup>Die mittlere Blocklänge  $\bar{b} = 10$  wird einmal mit der gekappten geometrischen Verteilung durch eine feste Blocklänge  $b = 60$  und einer Sprungwahrscheinlichkeit  $p = 5\%$  simuliert und einmal mit der reinen geometrischen Verteilung mit einer Eintrittswahrscheinlichkeit  $p = 5,7\%$ . Die mittlere Blocklänge  $\bar{b} = 50$  wird mittels der geometrischen Verteilung mit der Eintrittswahrscheinlichkeit  $p = 2\%$  erreicht.

guter Indikator für die Wahl der optimalen mittleren Blocklängen. Welche Werte man letztendlich einsetzt, hängt von Datensatz und Länge der Simulationstage ab. Es müssen ausreichend Sprünge gewährleistet werden, sodass auch eine nicht sehr gute Replizierung der Autokorrelationen in Kauf genommen werden muss. Das wichtigste Ergebnis ist vielmehr die Abbildung der realen Eigenschaften der Varianzen. In den folgenden Modellberechnungen wird für die Blocklängen die Einstellung der geometrischen Verteilung mit einer Eintrittswahrscheinlichkeit von  $p = 5\%$  gewählt. Die mittlere Blocklänge beträgt in diesem Fall  $\bar{b} = 20$  Tage und die Abbildungen A.21 und A.22 zeigen eine gute Übereinstimmung der simulierten mit den historischen Werten.

Weiterhin werden die Verteilungen der Steigungen und Krümmungen noch nicht repliziert. Die optischen Verläufe der Zinskurven hängen anscheinend hauptsächlich von diesen Eigenschaften ab und erreichen deshalb noch kein realistisches Aussehen wie man in Abbildung 4.28 sehen kann. In den nächsten Modellerweiterungen soll dieses Problem gelöst werden mit dem Ziel die bisher erreichten Charakteristiken beizubehalten.

#### • Simulierte Zinskurven<sup>44</sup>

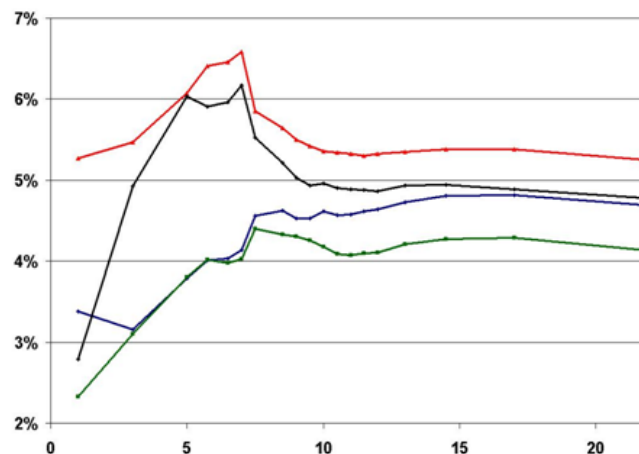


Abbildung 4.28: RMJBN Modell Version 2: Simulierte Zinskurven

<sup>44</sup>Die simulierten Zinspfade im Zeitablauf sind unter <http://vids.myspace.com/index.cfm?fuseaction=vids.individual&videoid=44029535> zu sehen. Es werden im Vergleich die Zinspfade der Modell Version 2, 3 und des Extended Modells dargestellt.

### Semiparametrisches RMJBN Modell

#### MODELL VERSION 3

Im Allgemeinen sind Zinskurven am langen Ende weniger volatil als am kurzen Ende des Zinsbereichs. Eine mögliche Erklärung dafür lässt sich über das Verhalten von Arbitrageuren herleiten. Wie in Abschnitt 2.5 bereits erläutert, handelt es sich um eine lokale Delle in der Zinskurve, falls eine der folgenden Situationen auftritt:

$$y_{i-i}^t < y_i^t > y_{i+1}^t \quad \text{bzw.} \quad y_{i-i}^t > y_i^t < y_{i+1}^t$$

Wenn ein Arbitrageur eine solche Situation erkennt, kann er die sogenannte Barbell Strategie anwenden. Dabei werden die hohen Zinsen  $y_{i-i}^t, y_{i+1}^t$  gezahlt und die niedrigen Zinsen  $y_i^t$  eingenommen (oder umgekehrt). Falls eine solche Delle in der Zinskurve auf Grund eines Ungleichgewichts im Geldangebot oder der Geldnachfrage entstanden ist, kann diese durch die Anwendung einer Barbell Strategie, von vielen Händlern gleichzeitig, wieder verschwinden. Würden die Dellen nur durch Marktungleichgewichte entstehen, könnte jede Delle in der Zinskurve durch das Handeln von Arbitrageuren geglättet werden. Offensichtlich ist dies aber nicht der Fall, also muss es noch weitere Gründe für das Auftreten von lokalen Extremstellen geben. In einigen Situationen kann keine Barbell Strategie angewendet werden. Wird z.B. vermutet, dass sich eine Delle wegen der Veränderung der Zinskurvenform, also durch eine schnelle Änderung von Markterwartungen gebildet hat, ist eine solche Strategie nicht anwendbar. Arbitrageure können sich nur einen Gewinn aus der Barbell Strategie erhoffen, wenn die Zinskurvendellen nicht die Erwartungen zukünftiger Zinsen widerspiegeln. Forward Rates eignen sich auf Grund der Risikoprämie nicht, direkte Informationen über Zinserwartungen zu erhalten. Der Einfluss der Risikoprämie auf die Form der Zinskurven wird umso größer, je länger die Laufzeit der Zinsen ist. Dementsprechend ist es wahrscheinlicher, dass schnelle Änderungen im kurzfristigen Zinsbereich ein Zeichen für Änderungen der Markterwartungen sind als Änderungen im langfristigen Zinsbereich. Arbitrageure platzieren ihre Trades deshalb mehr am langen Ende der Zinskurve. Dieses Verhalten hat zur Folge, dass die langfristigen Zinskurvenbereiche glatter sind als die kurzfristigen. Natürlich ist diese Erklärung der Zinskurvendellen stark vereinfacht und es gibt sicherlich noch eine Vielzahl von anderen Einflussfaktoren.

Trotzdem soll nun versucht werden, die obigen Eigenschaften mittels Federkonstanten  $f_j$  unterschiedlicher Stärken, die mit den Krümmungen  $\kappa_j^t$   $j = 2, \dots, N-1$  multipliziert werden, in das Modell einzubauen. Die Krümmungen berechnen sich nach der Formel (2.19). Die dritte Modellversion besitzt folgenden rekursiven Al-

gorithmus:

1. Aufaddieren zufällig gewählter historischer Zinsänderungen:

$$y_j^t = \tilde{y}_j^{t-1} + \Delta y_j^{t*} \quad j = 1, \dots, N,$$

2. Berechnung der Krümmung:

$$\kappa_j^t = a_j(y_{j+1}^t - y_j^t) - b_j(y_j^t - y_{j-1}^t) \quad j = 2, \dots, N-1$$

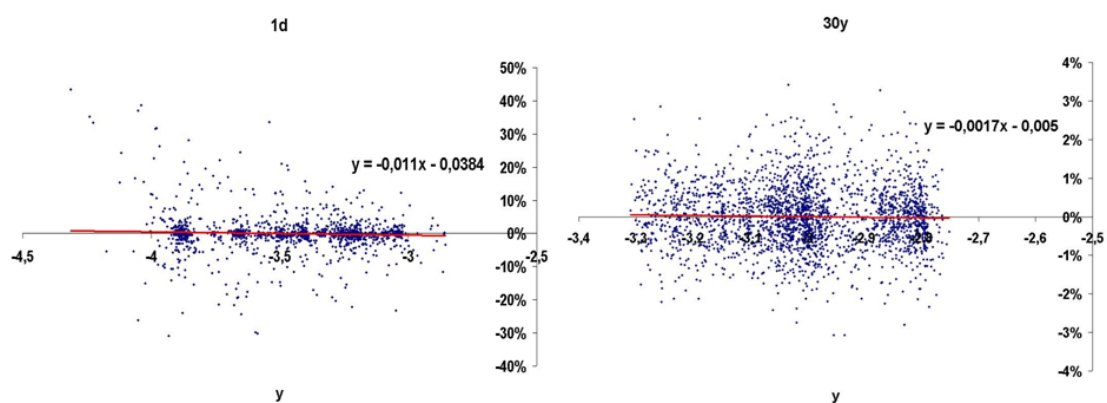
3. a) Glätten der Zinskurve durch einen Federterm mit dem zeitlich konstanten Faktor  $f_j$ :

$$\tilde{y}_j^t = y_j^t + f_j \kappa_j^t \quad j = 2, \dots, N-1 \quad t = 1, \dots, P \quad (4.72)$$

- b) Einfügen eines zeitlich konstanten Mean Reverting Speeds  $ms_j$  und Levels  $ml_j$ :

$$\tilde{y}_j^t = y_j^t + ms_j(ml_j - y_j^t) \quad j = 1, N \quad t = 1, \dots, P \quad (4.73)$$

wobei  $a_j = \frac{2}{(T_{j+1}-T_{j-1})(T_{j+1}-T_j)}$  und  $b_j = \frac{2}{(T_{j+1}-T_{j-1})(T_j-T_{j-1})}$ . Da beim ersten und letzten Zinssatz keine Krümmungen berechnet werden können, wird ein einfacher Mean Reverting Term eingeführt. Der Mean Reverting Speed und der Mean Reverting Level lassen sich wie folgt berechnen.



**Abbildung 4.29:** Scatterplot der Zinslevel mit den Tageszinsänderungen für 1d und 30y.

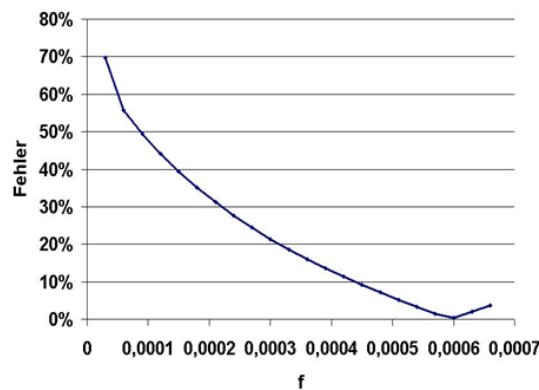
In den beiden Abbildungen (4.29) sind zwei Scatterplots zu sehen, bei denen auf der x-Achse die logarithmierten Zinslevel und auf der y-Achse die Tageszinsän-

derungen abgebildet werden. Zusätzlich wurde eine lineare Regressionsgerade mit der dazugehörigen Gleichung eingezeichnet. Aus diesen Daten lassen sich nun der MR-Speed und der MR-Level berechnen<sup>45</sup>. Der MR-Speed  $ms_1$  ist der Negativbetrag der Steigung, also 0,011 und der Langzeitmittelwert  $ml_1$  ist der geschätzte Achsenabschnitt  $-0,0384$  geteilt durch  $ms_1 = 0,011$ , woraus  $ml_1 = -3,51 \approx 3\%$  folgt. Die Werte für den 30y Zins sind in der nachfolgenden Tabelle zu finden.

	1d	30y
$ms_j$	0,011	0,0017
$ml_j$	3%	5%

**Tabelle 4.8:** Mean Reverting Speed und Level

Die Konstanten  $f_j$  werden so gewählt, dass die simulierten Zinspfade im Mittel die Standardabweichungen der EURIBOR Zins-Krümmungen replizieren.<sup>46</sup> Im Folgenden wird eine Möglichkeit vorgestellt, diese Optimierung schnell durchzuführen. Dazu seien  $\sigma_j^*$  die Standardabweichungen der EURIBOR Zins-Krümmungen und  $\sigma_j^t$  die Näherungswerte, die in Abhängigkeit von  $f_j^t$  zu bestimmen sind. Gesucht wird nun ein Ausdruck für  $f_j^t$  mit dem  $\sigma_j^t$  berechnet wird, um anschließend den relativen Fehler zwischen  $\sigma_j^*$  und  $\sigma_j^t$  zu minimieren.  $f_j^t$  wird solange neu berechnet, bis der relative Fehler ausreichend klein wird.



**Abbildung 4.30:** Fehlerfunktion der Standardabweichung in Abhängigkeit der Konstanten  $f$  am Beispiel des 1m Zins

Um ein genaueres Bild zu bekommen, wie sich  $\sigma_j^t$  in Abhängigkeit von  $f_j^t$  verhält, wird in Abbildung 4.30 die Fehlerfunktion am Beispiel des 1m Zins dargestellt<sup>47</sup>.

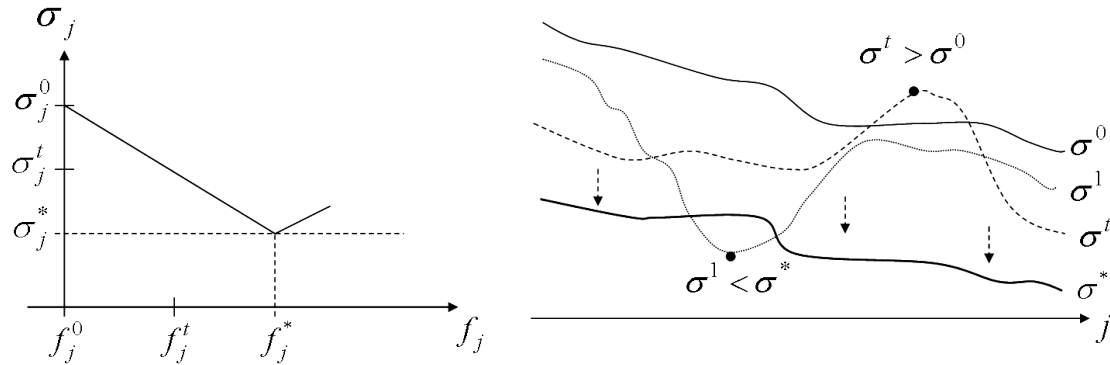
<sup>45</sup>vgl.[Bla01]

<sup>46</sup>In Rebonato *et al* wurde kein Algorithmus zur Berechnung der Faktoren vorgestellt.

<sup>47</sup>Bei den anderen Zinssätzen ergeben sich ähnliche Verläufe.



Es ist ein annähernd linearer aber stetiger Abfall des Fehlers bei steigendem  $f_j$  zu beobachten. In Abbildung 4.31 (links) ist der schematische Zusammenhang zwischen der Standardabweichung  $\sigma_j^t$  und  $f_j^t$  dargestellt.



**Abbildung 4.31:** Links: Schematische Darstellung der Fehlerfunktion. Rechts: Schematische Darstellung des Standardabweichungsverlaufs über  $j$

Es gilt  $\sigma_j^0 = c_j f_j^0 + b_j \Rightarrow b_j = \sigma_j^0 - c_j f_j^0$ . Einsetzen in  $\sigma_j^t = c_j f_j^t + b_j$  liefert  $\sigma_j^t = c_j f_j^t + \sigma_j^0 - c_j f_j^0 \Rightarrow c_j = \frac{\sigma_j^t - \sigma_j^0}{f_j^t - f_j^0}$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_j^* &= c_j f_j^* + b_j = \frac{\sigma_j^t - \sigma_j^0}{f_j^t - f_j^0} f_j^* + \sigma_j^0 - \frac{\sigma_j^t - \sigma_j^0}{f_j^t - f_j^0} f_j^0 \\ \Rightarrow \frac{\sigma_j^t - \sigma_j^0}{f_j^t - f_j^0} f_j^* &= \sigma_j^* - \sigma_j^0 + \frac{\sigma_j^t - \sigma_j^0}{f_j^t - f_j^0} f_j^0 \\ \Rightarrow f_j^* &= \frac{\sigma_j^* - \sigma_j^0}{\sigma_j^t - \sigma_j^0} (f_j^t - f_j^0) + f_j^0 \quad j = 2 \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Um die Referenzwerte  $\sigma_j^0$  zu berechnen, startet der Optimierungsalgorithmus mit den Werten  $f_j^0 = 0$ . Die ersten Schrittweiten betragen  $f_j^1 = 0,0001$ . In einem Optimierungsdurchgang  $t$  werden die Faktoren  $f_j$  für jeden Zinssatz, auf Grund vorhandener Kopplungseffekte simultan berechnet. Da  $f_j$  nicht negativ werden darf, muss (4.74) etwas modifiziert werden. In Abbildung 4.31 rechts sind zwei zu beachtende Sonderfälle dargestellt.

1. Sobald im ersten Schritt  $\sigma_j^1 < \sigma_j^*$  ist, wird  $f_j = 0$  gesetzt.
2. Während des Optimierungsprozesses kann es passieren, dass eine Standardabweichung größer als der Referenzwert wird, also  $\sigma_j^t > \sigma_j^0$  gilt. In diesem Fall wird die Differenz  $|\sigma_j^t - \sigma_j^0|$  etwas verkleinert, um anschließend mit diesem Wert weiter zu rechnen. Damit wird sichergestellt, dass  $\sigma_j^t$  tatsächlich gegen  $\sigma_j^*$  konvergiert.

Daraus folgt:

$$f_j^{t+1} = \frac{\min(\sigma_j^* - \sigma_j^0, 0)}{\min\left(\sigma_j^t - \sigma_j^0, \frac{|\sigma_j^t - \sigma_j^0|}{-1,1}\right)} f_j^t \quad j = 2 \dots, N - 1. \quad (4.75)$$

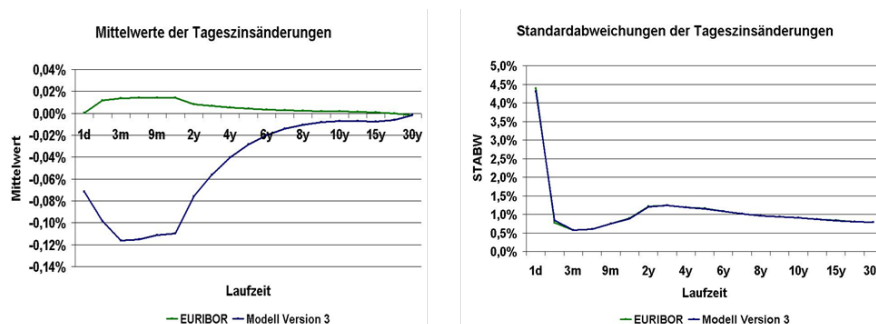
Der Algorithmus wird abgebrochen, sobald der relative Fehler  $\frac{\sigma_j^*}{\sigma_j^t} - 1 < X\%$  für alle  $j = 2, \dots, N - 1$  ist<sup>48</sup>.

Laufzeit	1m	3m	6m	9m	12m	2y	3y	4y	5y
$f_j$	0,001	0,006	0,013	0,024	0,033	0,052	0,118	0,129	0,168
Laufzeit	6y	7y	8y	9y	10y	12y	15y	20y	
$f_j$	0,164	0,192	0,190	0,199	0,343	0,629	1,082	1,524	

**Tabelle 4.9:** Federkonstanten  $f_j$

In der Tabelle 4.6 sind alle berechneten Federkonstanten aufgelistet. Es ist zu beobachten, dass die Werte im kurzfristigen Zinsbereich kleiner sind als im langfristigen Bereich. Damit bestätigt sich die Aussage, dass Arbitrageure aktiver am langen Ende der Zinskurve handeln. Die empirische Feststellung glatter Zinskurven im langfristigen Zinsbereich wird also durch das Modell abgebildet. Diese Werte werden jetzt in dem Algorithmus (4.72) verwendet. Die erzeugten Pfade werden anschließend auf ihre realen Eigenschaften hin untersucht.

- **Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen**

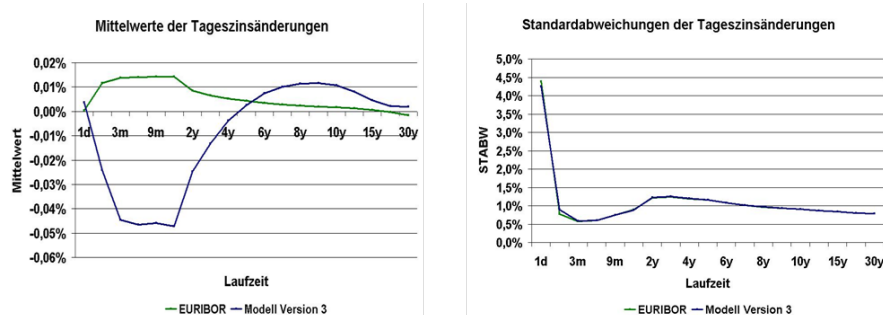


**Abbildung 4.32:** RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung **mit Mean Reverting Term** und Startzinsen vom 4.7.2008

Die Standardabweichungen der Tageszinsänderungen werden exakt abgebildet. Die Mittelwerte hingegen sind deutlich kleiner, was darauf hindeutet, dass der Mechanismus mit den Federkonstanten einen Drift in das Modell einbaut. Um zu

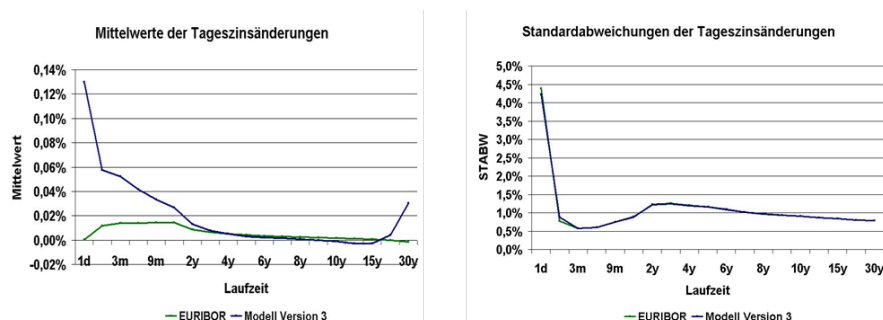
<sup>48</sup>Es hängt vom Datensatz ab, wie weit man an die historischen Werte herankommt. Für den hier verwendeten Datensatz gilt  $X = 2\%$ .

überprüfen, wie stark dieser Drift von dem Mean Reverting des ersten und letzten Zinssatzes abhängt, wird für die Simulation der nächsten Grafik  $ms_j = 0$  für  $j = 1, 19$  gesetzt.



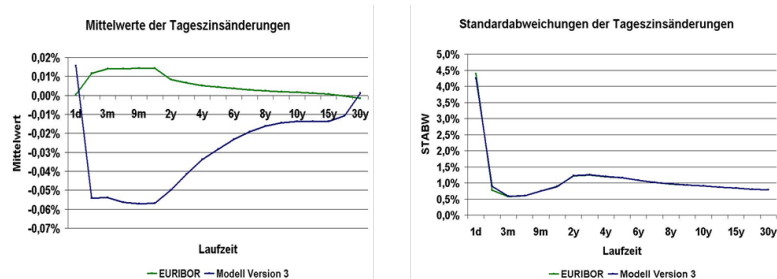
**Abbildung 4.33:** RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung **ohne Mean Reverting Term** und Startzinsen vom 4.7.2008

Es ist zu beobachten, dass der Mittelwert zwar negativ bleibt, jedoch nicht mehr so stark negativ wie in der Simulation mit den Mean Reverting Termen. Die Simulation verwendet als Startzinskurve Zinsen vom 4.7.2008. Der Tageszins lag dort bei ca. 4% und der 30y Zins bei ca 5%. Es ist daher naheliegend, dass der Mittelwert bei der Simulation mit den Mean Reverting Termen im kurzen Zinsbereich stärker negativ wird als im langfristigen Bereich. Um zu testen, ob der Mechanismus generell einen negativen Drift generiert, werden die Auswertungen mit einer anderen Startzinskurve wiederholt. Als geeignet erscheint die Zinskurve vom 2.12.2005. Dort beträgt der Tageszins 1,8% und der 30y Zins 3,9%, er liegt also deutlich unter den Mean Reverting Leveln  $ml_j$ . Bei der Simulation mit den Mean Reverting Termen ist also ein positiver Mittelwert zu erwarten.



**Abbildung 4.34:** RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung **mit Mean Reverting Term** und Startzinsen vom 2.12.2005

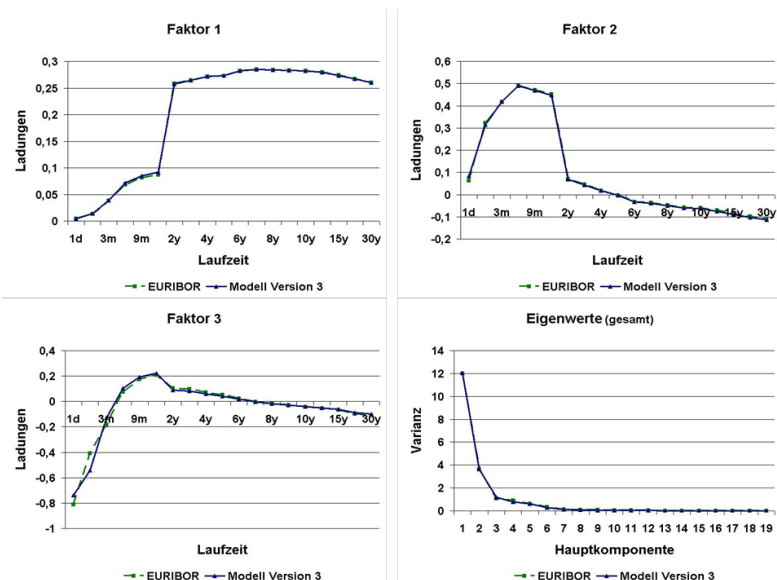
Wie erwartet, ist der Mittelwert vor allem im kurzen Zinsbereich positiv. Es ist deutlich zu sehen, dass die Mean Reverting Terme den Mittelwert der gesamten Zinskurve beeinflussen.



**Abbildung 4.35:** RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung **ohne Mean Reverting Term** und Startzinsen vom 2.12.2005

Ohne die Mean Reverting Terme sind die Mittelwerte im mittleren Zinsbereich wieder negativ, wie es schon in Abbildung 4.33 zu beobachten ist. Das Modell baut also immer einen negativen Drift in die Zinskurven ein. Aus den Ergebnissen kann man schlussfolgern, dass das Einbinden der Mean Reverting Terme nötig ist, da sie der gesamten Zinskurve einen sinnvollen Drift verleihen.

#### • Eigenwerte und Eigenvektoren

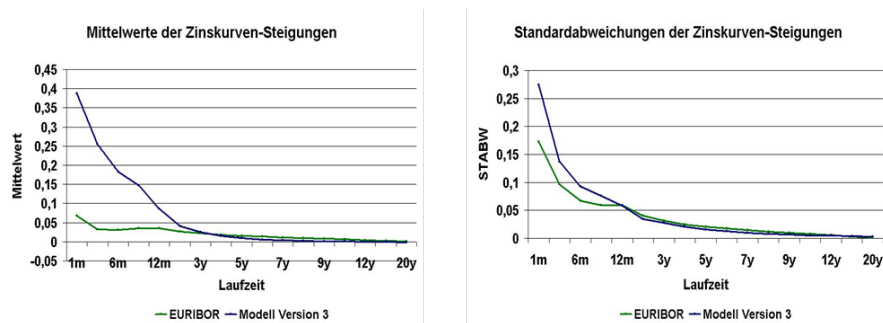


**Abbildung 4.36:** RMJBN Modell Version 3: Eigenwerte und Eigenvektoren

Wie schon festgestellt, führt der Federmechanismus eine Driftbewegung in das Modell ein und somit entsprechen die Tageszinsänderungen des Modells nicht mehr

exakt den historischen Tageszinsänderungen. Da die Zeitintervalle  $\Delta t = 0,0027$  Jahre betragen, ist der Einfluss dieser Driftbewegung auf die Kovarianzmatrix nur sehr gering. Der neue Mechanismus repliziert also approximativ die historischen Eigenwerte, wie man in Abbildung 4.36 sehen kann.

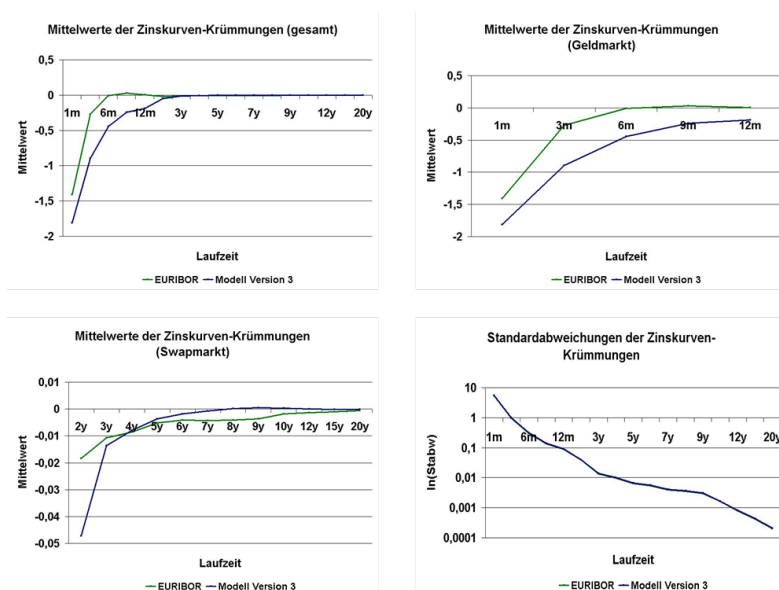
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen



**Abbildung 4.37:** RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen

Die Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen haben sich im Vergleich zur vorherigen Modellversion verbessert und stimmen ab dem 12m fast exakt mit den historischen Werten überein. Bei den Mittelwerten gibt es im kurzfristigen Zinsbereich starke Abweichungen.

- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen



**Abbildung 4.38:** RMJBN Modell Version 3: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen

Die Standardabweichungen der Krümmungen stimmen auf Grund der Optimierung bis auf eine kleine Fehlertoleranz überein. Bei den Mittelwerten gibt es allerdings größere Abweichungen gegenüber den EURIBOR Daten. In Abbildung A.25 und A.26 im Anhang sind alle Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen geplottet. Die gestrichelten Linien stellen die Verteilungen der EURIBOR Krümmungen dar und die durchgezogenen Linien die der simulierten Zinskrümmungen. Hier wird nochmal die Abweichung des Mittelwerts der einzelnen Verteilungen deutlich. Wie man in Abbildung 4.39 sieht, nehmen die Zinskurven durch die Replizierung der Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen plausible Formen an. Allerdings entstehen auch Kurven, die weniger plausibel aussehen.

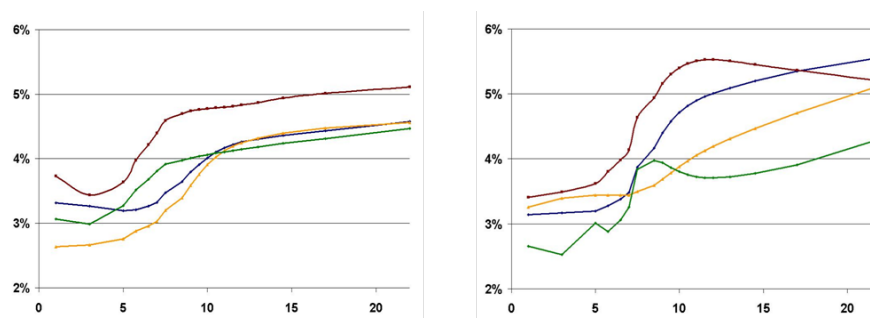
- **Varianzen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen**

In der Abbildung A.27 im Anhang sind die Varianzen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen abgebildet. Im Vergleich zur zweiten Modellversion beeinflusst der Federmechanismus das Verhalten der Varianzen nicht.

- **Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen**

Bei den Autokorrelationen kam es trotz gleicher Modelleinstellung (d.h. geometrisch verteilter Blocklängen mit einer Eintrittswahrscheinlichkeit  $p = 5\%$ ) zu einer Verbesserung der Autokorrelationen im kurzfristigen Zinsbereich (vgl. dazu Abbildung A.22 und A.28). Um den Effekt des Federmechanismus auf die Autokorrelationen zu überprüfen, wird in Abbildung A.29 die Blocklänge auf konstant eins gesetzt. Es zeigt sich, dass eine starke positive Autokorrelation im kurzfristigen Zinsbereich besteht. Dadurch wird bestätigt, dass durch den Mechanismus ein Drift in das Modell eingebaut wird, der am stärksten auf die kurzfristigen Zinsen wirkt.

- **Simulierte Zinskurven**



**Abbildung 4.39:** RMJBN Modell Version 3: Links: plausibel erscheinende Zinskurven. Rechts: weniger plausibel erscheinende Zinskurven

Die Formen der Zinskurven sind im Vergleich zu den Modellen der Version eins und zwei wesentlich realistischer. Beim Betrachten ganzer Pfade im Zeitablauf sind einzelne Zinskurven zu beobachten, die weniger plausibel erscheinen (vgl. Abbildung 4.36 rechts). Durch eine Weiterentwicklung des Modells soll versucht werden, eine Verbesserung der Zinskurvenformen zu erreichen. Da bislang nur die Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen repliziert werden, könnte man versuchen, die Krümmungsmittelwerte ebenfalls anzupassen. Das genaue Vorgehen wird im nächsten Abschnitt erläutert.

### 4.3.5 Extended RMJBN Modell

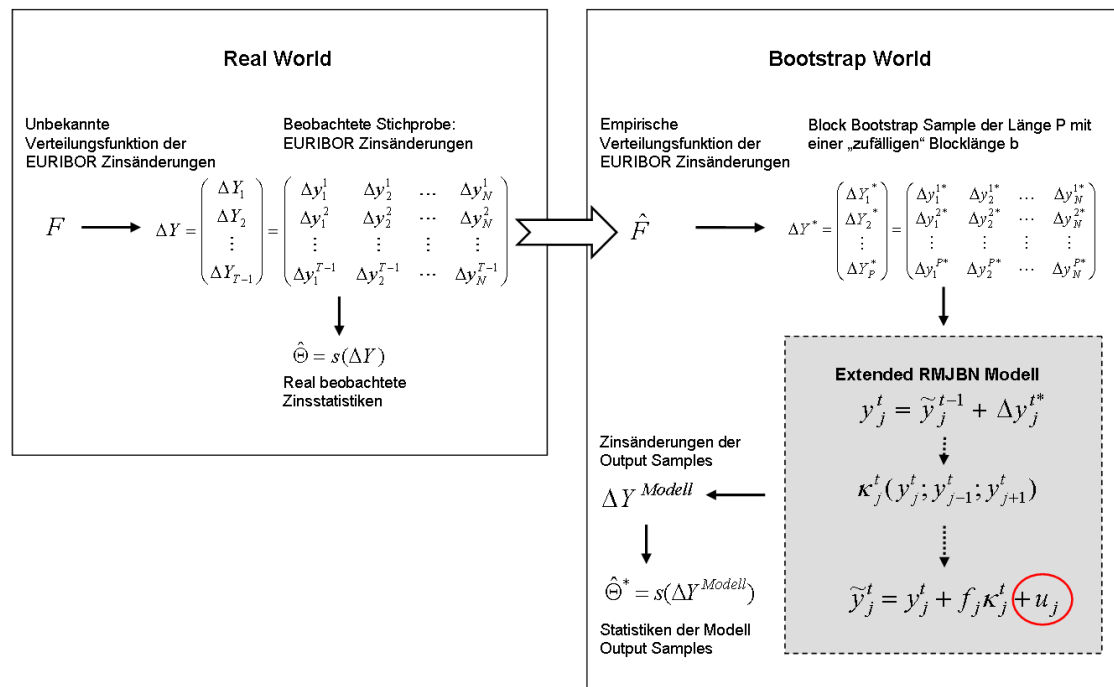


Abbildung 4.40: Schema-Diagramm des Extended RMJBN Modells

Durch die Weiterentwicklung werden die Mittelwerte der Zinskurven-Krümmungen repliziert, ohne die bereits vorhandenen Eigenschaften zu verschlechtern. Um zu sehen, wie eine derartige Anpassung vorgenommen werden kann, muss zuerst das zeitliche Mittel der Krümmung über die Zeitreihe berechnet werden. Die neuen Krümmungen nach Schritt 3a) des obigen Algorithmus<sup>49</sup> berechnen sich wie folgt

<sup>49</sup>Die Mean Reverting Terme in Schritt 3b) bleiben weiterhin erhalten.

für  $j = 2 \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\kappa}_j^t &= a_j(\tilde{y}_{j+1}^t - \tilde{y}_j^t) - b_j(\tilde{y}_j^t - \tilde{y}_{j-1}^t) \\
 &= a_j(y_{j+1}^t + f_{j+1}\kappa_{j+1}^t - y_j^t - f_j\kappa_j^t) - b_j(y_j^t + f_j\kappa_j^t - y_{j-1}^t - f_{j-1}\kappa_{j-1}^t) \\
 &= a_j(y_{j+1}^t - y_j^t) - b_j(y_j^t - y_{j-1}^t) + a_j(f_{j+1}\kappa_{j+1}^t - f_j\kappa_j^t) - b_j(f_j\kappa_j^t - f_{j-1}\kappa_{j-1}^t) \\
 &= \kappa_j^t + a_j(f_{j+1}\kappa_{j+1}^t - f_j\kappa_j^t) - b_j(f_j\kappa_j^t - f_{j-1}\kappa_{j-1}^t). \tag{4.76}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt für das zeitliche Mittel der Krümmung über die Zeitreihe:

$$\langle \tilde{\kappa}_j \rangle = \langle \kappa_j \rangle + a_j(f_{j+1} \langle \kappa_{j+1} \rangle - f_j \langle \kappa_j \rangle) - b_j(f_j \langle \kappa_j \rangle - f_{j-1} \langle \kappa_{j-1} \rangle) \tag{4.77}$$

Um den Mittelwert anzupassen, muss die Gleichung (4.77) durch eine zeitliche Konstante verschoben werden. Es wird eine Konstante  $u_j$  eingeführt, so dass gilt:

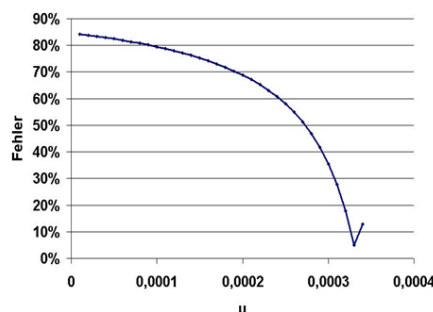
- (3) a') Glätten der Zinskurve durch einen Federterm mit dem zeitlich konstanten Faktor  $f_j$  und Verschieben mit einem konstanten Summand  $u_j$ :

$$y_j^t = y_j^t + f_j\kappa_j^t + u_j \quad j = 2, \dots, N - 1 \quad t = 1, \dots, P \tag{4.78}$$

Das zeitliche Mittel wird jetzt um einen Konstanten Faktor  $U_j = a_j(u_{j+1} - u_j) - b_j(u_j - u_{j-1})$  verschoben, d.h.

$$\langle \tilde{\kappa}_j \rangle = \langle \kappa_j \rangle + a_j(f_{j+1} \langle \kappa_{j+1} \rangle - f_j \langle \kappa_j \rangle) - b_j(f_j \langle \kappa_j \rangle - f_{j-1} \langle \kappa_{j-1} \rangle) + U_j \tag{4.79}$$

Diese Faktoren beeinflussen allerdings auch die Standardabweichungen der Krümmungen  $\sqrt{\langle (\kappa_j - \langle \kappa_j \rangle)^2 \rangle}$ , was beim Optimieren berücksichtigt werden muss. Die Konstanten  $u_j$  werden so gewählt, dass die simulierten Zinspfade im Mittel die Mittelwerte der EURIBOR Zins-Krümmungen replizieren.



**Abbildung 4.41:** Fehlerfunktion der Mittelwerte in Abhängigkeit der Konstanten  $u$  am Beispiel des 1m Zins



Seien  $\mu_j^t$  die Mittelwerte in Abhängigkeit der Konstanten  $u_j^t$ . Abbildung 4.40 zeigt einen parabelförmigen Verlauf der Fehlerfunktion des Mittelwerts in Abhängigkeit der Faktoren  $u$ . Bei dem Optimierungsalgorithmus (4.74) muss deswegen nach jedem Schritt ein neuer Referenzwert  $\mu_j^t$  verwendet werden. Eine Fallunterscheidung ist nicht mehr nötig, da auch negative Faktoren erlaubt sind. Die Faktoren zum Verschieben der Mittelwerte werden wie folgt berechnet:

$$u_j^{t+1} = \frac{\mu_j^* - \mu_j^{t-1}}{\mu_j^t - \mu_j^{t-1}}(u_j^t - u_j^{t-1}) + u_j^{t-1} \quad j = 2, \dots, N-1 \quad t = 0, \dots \quad (4.80)$$

Die Startwerte<sup>50</sup> betragen  $u_j^0 = 0$  und  $u_j^1 = 0,000001$ . Aufgrund der Kopplungseffekte werden zuerst die Federkonstanten  $f_j$  und anschließend die Mittelwertterme  $u_j$  simultan, d.h für alle  $j$  gleichzeitig berechnet. Insgesamt wird der Algorithmus zweimal wiederholt. Beim zweiten Durchlauf werden die optimierten Werte des ersten Durchgangs verwendet<sup>51</sup>. Die resultierenden Konstanten sind in der folgenden Tabelle enthalten:

Laufzeit	1m	3m	6m	9m	12m	2y	3y	4y	5y
$f_j$	0,001	0,002	0,004	0,008	0,012	0,018	0,035	0,036	0,052
$u_j$	-0,0001	-0,001	-0,002	-0,002	-0,002	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001
Laufzeit	6y	7y	8y	9y	10y	12y	15y	20y	
$f_j$	0,064	0,083	0,088	0,102	0,177	0,331	0,542	0,867	
$u_j$	-0,0007	-0,0005	-0,0003	-0,0002	-0,0002	0,00003	0,0003	0,0003	

**Tabelle 4.10:** Feder-  $f_j$  und Mittelwertkonstanten  $u_j$

Diese Werte werden jetzt zur Berechnung der Zinskurven verwendet und die erzeugten Pfade auf ihre Eigenschaften hin untersucht.

Version 1	Version 2	Version 3	Extended	Eigenschaften
+	+	+	+	Statistik: Tageszinsänderungen
+	+	+	+	Eigenwerte und Eigenvektoren
-	-	-	+-	Statistik: Steigungen
-	-	+( $\sigma$ )	++( $\mu, \sigma$ )	Statistik: Krümmungen
-	+	+	+	Varianzen der q-Tagesänderungen
-	+	+	+	Lag-1 Autokorr. q-Tagesänderungen
-	-	+	++	Plausibles Aussehen

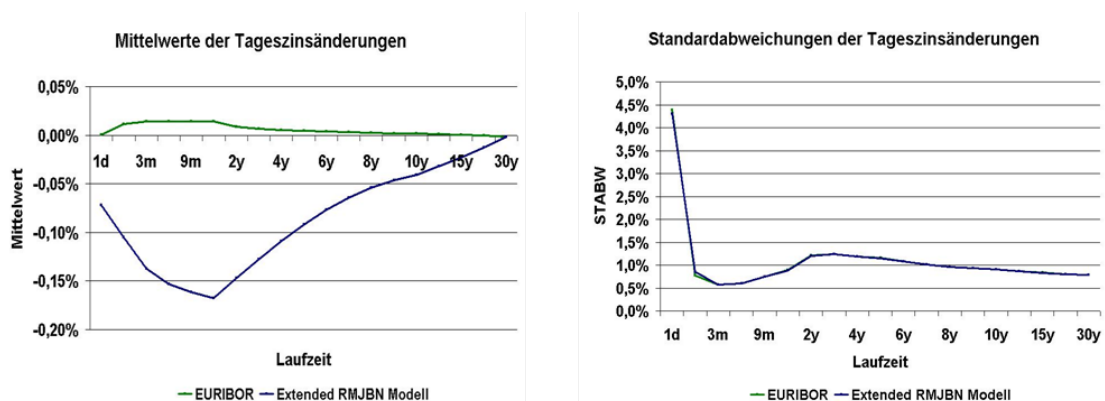
**Tabelle 4.11:** Übersicht der einzelnen Modellversionen mit ihren Eigenschaften

Im Vergleich zu den vorherigen Versionen erzeugt diese Modellversion jetzt etwas bessere Steigungsstatistiken. Durch die exakte Replizierung der Krümmungsmittelwerte erreicht man mit diesem Modell realistischere Zinskurven.

<sup>50</sup>Je nach Datensatz muss ein geeigneter Startwert  $u_j^1$  verwendet werden.

<sup>51</sup>Auch hier sind die Fehlertoleranzen von dem verwendeten Datensatz abhängig. Die Durchgänge werden bei erreichten Fehlern von  $X_1 = 4\%$  und  $X_1 = 2\%$  abgebrochen.

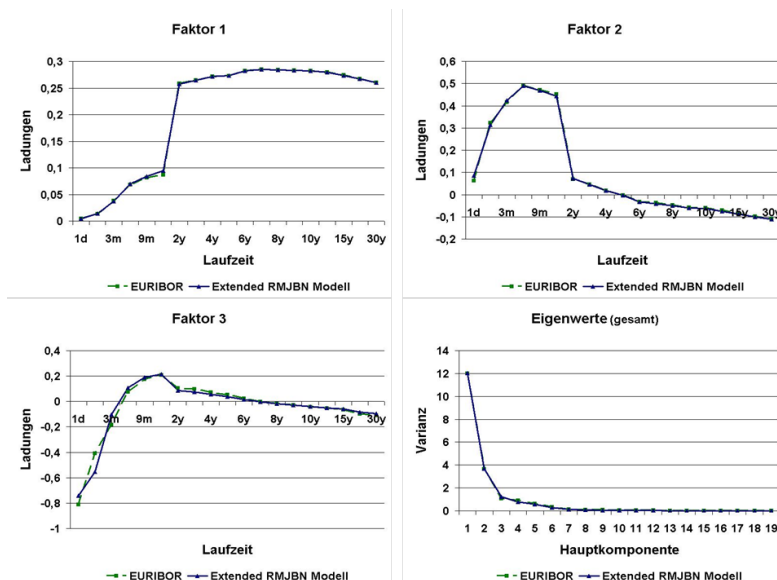
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderungen



**Abbildung 4.42:** Extended RMJBN Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Tageszinsänderung

Im Vergleich zur vorherigen Version ändert sich bis auf die leicht veränderten Mittelwerte nichts. Die Mittelwerte sinken etwas ab, wobei dies mit den negativen Mittelwertfaktoren bis zum 10y Zins zusammenhängt.

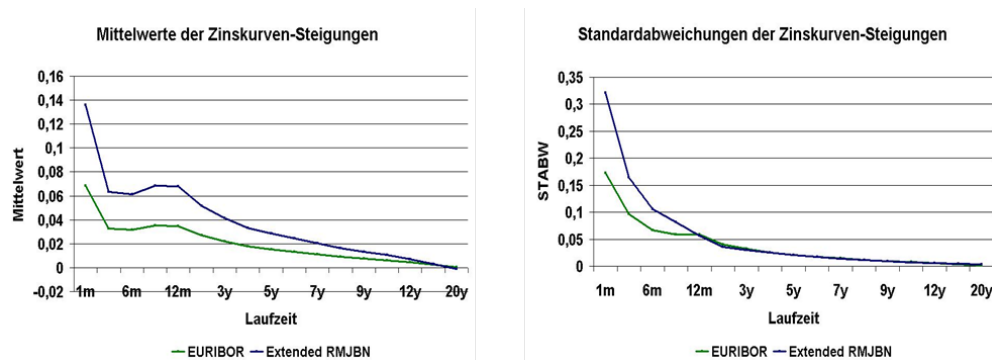
- Eigenwerte und Eigenvektoren



**Abbildung 4.43:** Extended RMJBN Modell: Eigenwerte und Eigenvektoren

Auch bei der erweiterten Version bleibt der Einfluss auf die Kovarianzmatrix sehr gering, was sich in den approximativ replizierten Eigenwerten und Eigenvektoren widerspiegelt.

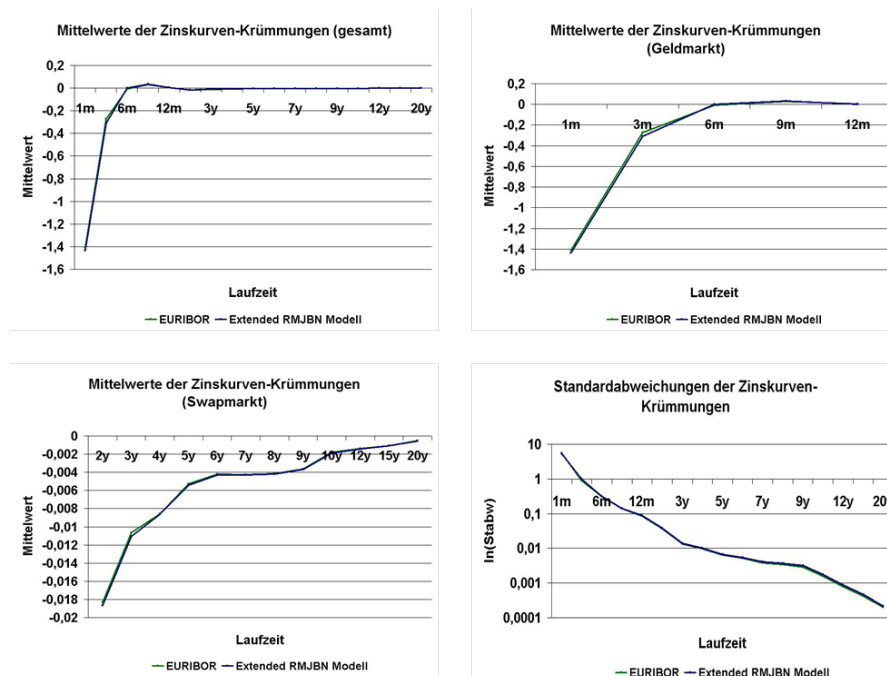
- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen



**Abbildung 4.44:** Extended RMJBN Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Steigungen

Die Mittelwerte der Zinskurven-Steigungen nähern sich deutlich besser den historischen Werten an, wohingegen die Standardabweichungen sich kaum verändert haben.

- Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen



**Abbildung 4.45:** Extended RMJBN Modell: Mittelwerte und Standardabweichungen der Zinskurven-Krümmungen

Die Mittelwerte und Standardabweichungen stimmen jetzt auf Grund der Kalibrierung der Faktoren  $f_j$  und  $u_j$  mit den historischen Werten fast exakt überein. Die Verteilungen sind in Abbildung A.30 und A.31 im Anhang dargestellt. Im Vergleich zu den Verteilungen der dritten Modellversion sind die Verbesserungen in der Replizierung der Krümmungsverteilungen deutlich sehen.

- **Varianzen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen**

In Abbildung A.32 sind bei den Varianzen nichtüberlappender q-Tages“-zinsänderungen keine nennenswerten Veränderungen entstanden. Möchte man Zinskurven über einen kürzeren Zeitraum simulieren, wie im Anwendungsbeispiel des 5. Kapitels, ist die Reduktion der mittleren Blocklänge notwendig. Dazu wird die Eintrittswahrscheinlichkeit auf  $p = 20\%$  gesetzt, was mit einer mittleren Blocklänge von 5 Tagen korrespondiert. In Abbildung A.34 sind die Ergebnisse mit dieser Einstellung dargestellt. Es wird deutlich, dass die Varianzen im kurzen Bereich nicht mehr so gut repliziert werden wie mit einer längeren mittleren Blocklänge. Trotzdem ist das Ergebnis zufriedenstellend und eine Simulation mit dieser Einstellung durchaus gerechtfertigt.

- **Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tageszinsänderungen**

Ebenso hat sich an den Lag-1 Autokorrelationen nichts geändert, wie man in Abbildung A.33 sehen kann. Die Abbildung A.35 zeigt die Korrelationen mit der Einstellung  $p=20\%$ . Auch hier sieht man, dass im kurzen Zinsbereich die Korrelationen nicht sehr gut dargestellt werden. Da alle anderen Eigenschaften erhalten bleiben, kann das Modell mit diesen Einstellungen verwendet werden.

- **Simulierte Zinskurven<sup>52</sup>**

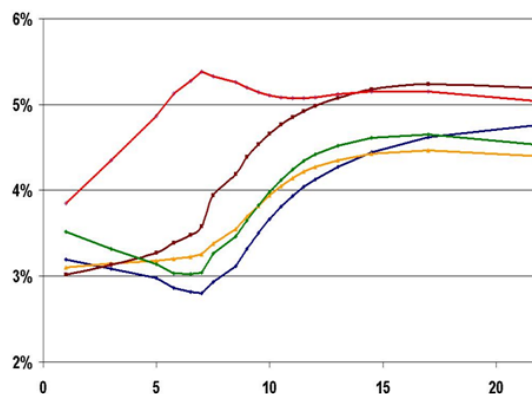


Abbildung 4.46: Extended RMJBN Modell: Simulierte Zinskurven

<sup>52</sup>Die simulierten Zinspfade im Vergleich sind unter <http://vids.myspace.com/index.cfm?fuseaction=vids.individual&videoid=44030375> zu sehen.

Die Abbildung 4.46 enthält ein paar Stichproben der simulierten Zinskurven, die durchweg plausibel erscheinen. In der Abbildung A.34 im Anhang sind einzelne Zinskurven im Vergleich dargestellt. Die grünen Kurven sind mit dem Extended Modell und die blauen Kurven mit der Modell Version 3 erzeugt worden. Man kann den positiven Einfluss der Mittelwertverschiebung auf die Formen der Zinskurven exakt erkennen. In Abbildung A.35 und A.36 sind nochmals Zinsflächen über einen Simulationszeitraum von 1200 Tagen ab dem 4.7.2008 abgebildet. Die Flächen in A.35 sind mit Modell der Version 3 und die Flächen in A.36 mit dem Extended Modell modelliert worden. Obwohl es sich nur um Stichproben handelt, sind in Abbildung A.36 realistischere Zinsflächen zu sehen<sup>53</sup>.

Trotzdem bleibt anzumerken, dass bei einer großen Anzahl an Pfaden immer wieder Kurven auftreten können, die nicht plausibel erscheinen. Im Großen und Ganzen ist es durch die Modellerweiterung gelungen, optisch ansprechende Zinskurven zu erzeugen, die eine Vielzahl von empirischen Charakteristiken erfüllen. Das Modell kann nun zur Simulation unterschiedlichster Zinsuniversen eingesetzt werden. Beispielsweise zur Modellierung der UK-LIBOR Rates, der US-Rates oder einzelner Zinskurven aus verschiedenen gerateten Sektoren. Jeder Einsatz erfordert eine entsprechende Kalibrierung der Modell-Faktoren. Zusammenfassend besteht der Vorteil dieses Modells darin, dass es alle wesentlichen Merkmale der realen Zinskurven abbildet. Optisch sind die modellierten Zinskurven in den meisten Fällen nicht von den realen Zinskurven zu unterscheiden. Der große Vorteil in der Praxisanwendung ist außerdem die Schnelligkeit des Modells auf Grund der Einfachheit des Algorithmus.

---

<sup>53</sup>Zum Vergleich ist auf S.18 die reale EURIBOR-Zinsfläche abgebildet.

# 5 Ergebnisse dieser Arbeit: Ein Anwendungsbeispiel

Im Folgenden werden die wichtigsten Ergebnisse nochmals zusammengefasst und anschließend eine Anwendungsmöglichkeit des Extended RMJBN Modells bezüglich einer Analyse von zwei Festgeldanlagen vorgestellt.

## RESÜMEE

Es wurden in dieser Diplomarbeit drei Modelle hinsichtlich ihrer Eignung zum Berechnen des Risikoexposures von Investoren untersucht. Das CIR-1 Modell gehört zur Klasse der Sell-Side Modelle (Pricing Modelle). Diese Modelle werden hauptsächlich zur Bewertung von Finanzinstrumenten eingesetzt und arbeiten unter einer sogenannten risikoneutralen Verteilung. Zur langfristigen Simulation realer Zinsszenarien müssen diese Modelle unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß aufgestellt und geschätzt werden. Da die Modelle nicht für diese Anwendung entwickelt wurden, liefern sie keine für die Praxis brauchbaren Ergebnisse. Dies wurde anhand des CIR-1 Modells nochmals verdeutlicht. Gesucht wird also eine weitere Möglichkeit, Zinskurven unter der empirischen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu modellieren.

Ein von der EZB verwendetes Modell ist das dynamische Nelson-Siegel Modell. Dieses „Latent-Factor Modell“ ist ein Drei-Faktor-Modell und modelliert die Zinskurven direkt unter dem empirischen Maß. Die Auswertungen ergeben Defizite bei den Schwankungen sowie den Formen der Zinskurven. Die Zinskurven sind im historischen Vergleich zu volatil und das typische Verhalten der Varianzen der  $q$ -Tageszinsänderungen wird nicht abgebildet. Die Abweichungen bei den Steigungs- aber vor allem bei den Krümmungsverteilungen sind auf die Tatsache zurückzuführen, dass nur drei mögliche Zinskurvenausprägungen modelliert werden können.

Eine weitere Möglichkeit, Zinskurven unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß zu modellieren, besteht darin, ein Bootstrapping Verfahren zu verwenden. Da in das RMJBN Modell die historischen Zinsänderungen einfließen, werden alle wesentlichen Merkmale der realen Zinskurven abgebildet. Durch einen Parameter werden die Standardabweichungen der Krümmungsverteilungen der modellierten Zinskurven an die realen Standardabweichungen kalibriert. Die resultierenden Zinskurven unterscheiden sich kaum von den real beobachteten Zinskurven. Trotzdem treten

hin und wieder unrealistische Zinsszenarien auf. Diese Beobachtungen motivierten eine Weiterentwicklung des Modells. Da bislang nur die Standardabweichungen der Krümmungsverteilungen über die Federkonstanten repliziert wurden, sollen jetzt über einen weiteren Parameter auch die Mittelwerte der Krümmungsverteilungen modelliert werden. Das dabei entstehende Extended RMJBN Modell simuliert im Vergleich zum ursprünglichen RMJBN Modell noch realistischere Zinsszenarien, ohne die anderen Eigenschaften zu verändern. Selbst Portfoliomanager der Deutschen Bank, die täglich mit Zinskurven arbeiten, konnten keinen signifikanten Unterschied zwischen den simulierten und den tatsächlichen EURIBOR-Zinskurven feststellen.

Die vorliegende Arbeit konnte zeigen, dass das Extended RMJBN Modell ein geeignetes Buy-Side Modell zum Bewerten des langfristigen Risikoexposures eines Investors ist. Das Modell kann nicht nur zur Bewertung des Risikoexposures aus Investorensicht, sondern auch für Anwendungen im Bereich der Bewertung von Kreditrisiken sowie zur strategischen Planung im Asset/Liability Management verwendet werden. Nicht zuletzt wird auch auf der Sell-Side ein solches Modell zur Beurteilung der Hedging Performance von Pricing Modellen benötigt.

In dieser Arbeit wurde nicht untersucht, wie man eine geeignete Mark to Market Bewertung zu einem zukünftigen Zeitpunkt vornehmen kann. Dieser Punkt sollte Gegenstand weiterer Untersuchungen sein. Bei der Berechnung von P&L Verteilungen ganzer Portfolien müssen auch die Korrelationen zwischen den Finanzinstrumenten untersucht werden. Eine Vielzahl von praxisrelevanten Folgeanwendungen, wie beispielsweise das Aufstellen eines asymmetrischen Portfolios oder das Strukturieren von Finanzprodukten nach festgelegten Auszahlungsprofilen, können durch die Bewertungsmethode der P&L Verteilungen betrachtet werden.

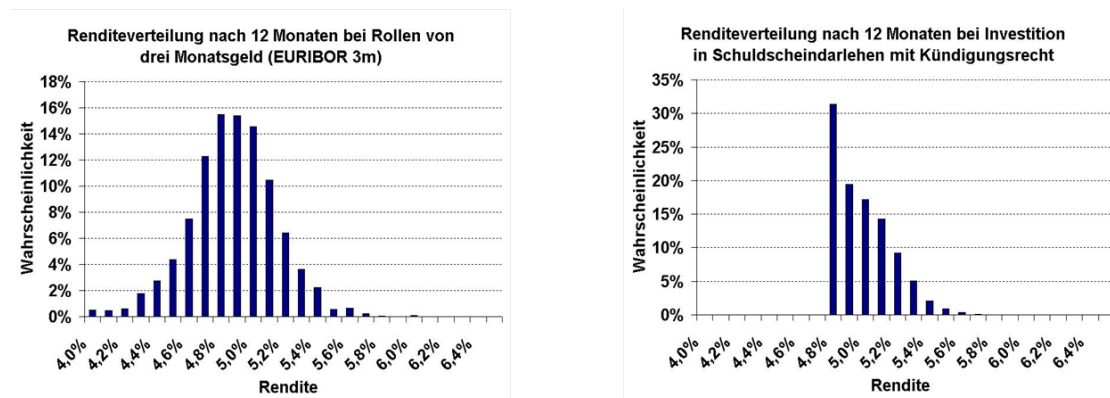
#### FESTGELDANALYSE

Ein Investor hat am 24.06.2008 die Wahl, in zwei verschiedene Festgeldanlagen mit einer Laufzeit von jeweils 12 Monaten zu investieren. Da er während der Laufzeit über das angelegte Geld eventuell verfügen möchte, bietet ihm seine Bank folgende Anlagemöglichkeiten an. Bei der ersten handelt es sich um rollierendes Drei-Monats-EURIBOR-Festgeld. Das Geld wird für ein Jahr lang alle drei Monate zum jeweiligen 3m EURIBOR Zins angelegt. Der anfängliche 3m EURIBOR Zins steht bei  $Y_{3m}^{EURIBOR} = 4,96\%$ .

Die zweite Möglichkeit besteht in einer Investition in ein Schuldscheindarlehen mit einer einerjährigen Verzinsung von  $Y_{12m}^S = 4,72\%$  und einem Kündigungsrecht nach sechs, acht und zehn Monaten. Der Investor wird von seinem Kündigungsrecht Gebrauch machen und in das kürzer laufende EURIBOR Festgeld wechseln, sobald

- $Y_{12m}^S < Y_{6m}^{EURIBOR}$  nach sechs Monaten,
- $Y_{12m}^S < Y_{4m}^{EURIBOR}$  nach acht Monaten,
- $Y_{12m}^S < Y_{2m}^{EURIBOR}$  nach zehn Monaten gilt.

Damit der Investor eine Entscheidung zwischen den beiden Anlagen treffen kann, muss er die Renditeverteilungen nach jeweils 12 Monaten betrachten. Hierzu wird ein Zinskurvenmodell im realen Maß<sup>1</sup> benötigt. Das Extended RMJBN Modell erfüllt diese Anforderung und kann nun nach entsprechender Kalibrierung der Parameter  $f_j$  und  $u_j$  an die realen EURIBOR Zinskurven zum Einsatz kommen. Als Sprungwahrscheinlichkeit wird  $p = 20\%$  gesetzt.



**Abbildung 5.1:** Links: Renditeverteilung nach 12 Monaten bei Rollen von drei Monatsgeld; Rechts: Renditeverteilung nach 12 Monaten bei Investition in Schuldscheindarlehen mit Kündigungsrecht (6m, 8m, 10m).

In Abbildung 5.1 sind die berechneten Renditeverteilungen zu sehen. Der Erwartungswert des rollierenden Drei-Monatsgeldes beträgt 4,82% und die Standardabweichung 0,27%. Der Erwartungswert des Schuldscheindarlehen beträgt 4,92% und die Standardabweichung 0,18%. Aus Sicht des Investors ist damit die Anlage in das Schuldscheindarlehen mit Kündigungsrecht zu bevorzugen. Der Investor hat bei dieser Anlage nicht nur einen höheren Erwartungswert, sondern ist auch nach unten abgesichert. Der 12-Monats-EURIBOR-Zins liegt zum Investitionszeitpunkt bei  $Y_{12m}^{EURIBOR} = 5,42\%$ . D.h., der Investor verzichtet auf Grund des Kündigungsrechts im schlimmsten Falle auf 0,7% Rendite, besitzt aber weiterhin in ca. 70% der Fälle die Möglichkeit eine Rendite über dem vereinbarten Zins zu erzielen. Deshalb handelt es sich hierbei um ein Optionsgeschäft.

<sup>1</sup>d.h. aus Investoren-Sicht inkl. aller Risikoprämien



# Literaturverzeichnis

- [Arn03] ARNOLD T., CRACK T. F. : *Option Pricing in the Real World: A Generalized Binomial Model with Applications to Real Options*. Working paper, 2003.
- [Art89] ARTZNER P., DELBAEN F.: *Term Structure of Interest Rates: The Martingale Approach*. Advances in Applied Mathematics, 10:95–129, 1989.
- [Bau07] BAUER M. D.: *Forecasting the Term Structure using Nelson-Siegel Factors and Combined Forecasts*. UC San Diego, Econ 220F, 2007.
- [Ber05] BERNADELL C., COCHE J., NYHOLM K.: *Yield Curve Prediction for the Strategic Investor*. EZB Working Paper Series No. 472, 2005.
- [Bjö96] BJÖRK T. O.: *Interest Rate Theory*. Springer Lecture Notes in Mathematics, 1656:53–122, 1996.
- [Bla01] BLANCO C., SORONOW D.: *Mean Reverting Processes*. Commodities Now, 68-72, 2001.
- [Bod03] BODMER D.: *Mean Reversion und Time Varying Expected Returns in internationalen Aktienmärkten*. Universität St. Gallen, 2003.
- [Bri06] BRIGO D., MERCURIO F.: *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer-Verlag , Second Edition, 2006.
- [Che05] CHEVALIER T. : *Ein Risikomodell für Bausparkollektive*. Dissertation Universität Köln, 2005.
- [Chr07] CHRISTENSEN J. H. E., DIEBOLD F. X., RUDEBUSCH G. D.: *The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models*. Pier Working Paper 07-029, 2007.
- [Cor08] CORONEO L., NYHOLM K., VIDOVA-KOLEVA R.: *How arbitrage-free is the Nelson-Siegel Model?* EZB Working Paper Series No. 874, 2008.
- [Cox79] COX J. C., ROSS S. A., RUBINSTEIN M.: *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, 7:229–263, 1979.

- [Czi07] CZIRAKY D.: *Forecasting the Yield Curve with S-Plus*. Willmott Magazine, 86-93, 2007.
- [Deu04] DEUTSCH H.-P.: *Derivate und Interne Modelle*. Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart, 3. Auflage, 2004.
- [Die06a] DIEBOLD F. X., LI C.: *Forecasting the term structure of government bond yields*. Journal of Econometrics, (130):337–364, 2006.
- [Die06b] DIEBOLD F. X., RUDEBUSCH G. D., ARUOBA S. B.: *The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach*. Journal of Econometrics, (131):309–338, 2006.
- [Die08] DIETZ H., KAPLAN T.: *LIBOR Markt Model im MCEV-Kontext und Steuerung mit Finanzinstrumenten*. Vortrag  $q_x$ -Club Köln, 2008.
- [Duf02] DUFFEE G.: *Term premia and interest rate forecasts in affine models*. Journal of Finance, 57:405–443, 2002.
- [Efr93] EFRON B., TIBSHIRANI R. J.: *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall, 1993.
- [Efr9a] EFRON B.: *Bootstrap methods: another look at the jackknife*. The Annals of Statistics, (7):1–26, 1979a.
- [Fis03] FISCHER T., MAY A., WALTHER B.: *Anpassung eines CIR-1-Modells zur Simulation der Zinsstrukturkurve*. Blätter der DGVFM XXVI, (2):193–206, November 2003.
- [Fis04] FISCHER T., MAY A., WALTHER B.: *Anpassung eines CIR-k-Modells zur Simulation der Zinsstrukturkurve*. Blätter der DGVFM XXVI, (3):369–387, Mai 2004.
- [Fra94] FRANKEL J. A., LOWN C. S.: *An Indicator of Future Inflation Extracted from the Steepness of the Interest Rate Yield Curve along its Entire Length*. Quarterly Journal of Economics, (109):517–530, 1994.
- [Gla04] GLASSERMAN P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, 2004.
- [Gün03] GÜNTHER M., JÜNGEL A.: *Finanzderivate mit MATLAB*. Vieweg Verlag, 1. Auflage, 2003.

- [Har79] HARRISON M., KREPS D.: *Martingales and arbitrage in multiperiod security markets*. J. Economic Theory, 20:381–408, 1979.
- [Hea92] HEATH D., JARROW R. , MORTON A.: *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation*. Econometrica, 60:77–105, 1992.
- [Hul06] HULL J. C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium, 4. Auflage, 2006.
- [Jol86] JOLLIFFE I.T.: *Principal Component Analysis*. Springer-Verlag, Second Edition, 1986.
- [Küh08] KÜHN C.: *Vorlesungsskript: Finanzmathematik in stetiger Zeit*. Uni Frankfurt, 2008.
- [Kün89] KÜNSCH H. R.: *The Jackknife and the Bootstrap for general stationary observations*. The Annals of Statistics, (17):1217–1241, 1989.
- [Lah99] LAHIRI S. N.: *Theoretical comparisons of block bootstrap methods*. Annals of Statistics, 27:386–404, 1999.
- [Liu88] LIU R. Y., SINGH K.: *Moving Blocks Jackknife and Bootstrap capture weak dependence*. Unpublished manuscript, Dept. Statistics, Rutgers Univ., 1988.
- [Lo 88] LO A., MACKINLEY A. C.: *Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test*. Review of Financial Studies, 1(1):41–66, 1988.
- [Lüt93] LÜTHKEPOHL H.: *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag , Second Edition, 1993.
- [Mar01] MARTELLINI L., PRIAULET P.: *Fixed-Income Securities, Dynamic methods for interest rate risk pricing and hedging*. Wiley, 2001.
- [Mar03] MARTELLINI L., PRIAULET P., PRIAULET S.: *Fixed-Income Securities, Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*. Wiley, 2003.
- [Mus04] MUSIELA M., RUTKOWSKI M.: *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer-Verlag, Second Edition, 2004.

- [Neu01a] NEUMAIER A., SCHNEIDER T.: *ARFit - A Matlab Package for Estimation of Parameters and Eigenmodes of Multivariate Autoregressive Models*. ACM Transactions on Mathematical Software, 27(1):58–65, 2001.
- [Neu01b] NEUMAIER A., SCHNEIDER T.: *Estimation of parameters and eigenmodes of multivariate autoregressive models*. ACM Transactions on Mathematical Software, 27(1):27–57, 2001.
- [Nyh07] NYHOLM K., REBONATO R.: *Long-Horizon Yield Curve Forecasts: Comparison of Semi-Parametric and Parametric Approaches*. Tanaka Business Schoole Working Papers: TBS/WP04/07, 2007.
- [Pol94] POLITIS D. N., ROMANO J. P.: *The Stationary Bootstrap*. Journal of the American Statistical Association, 89(427):1303–1313, 1994.
- [Pol08] POLITIS D. N., WHITE H.: *Automatic Block-Length Selection for the dependent bootstrap - Corrected version*. 2008.
- [Reb98] REBONATO R.: *Interest-Rate Option Models*. Wiley, Second Edition, 1998.
- [Reb05] REBONATO R., MAHAL S., JOSHI M., BUCHHOLZ L.-D., NYHOLM K.: *Evolving Yield Curves in the Real-World Measure: a Semi-Parametric Approach*. The Journal of Risk, (3):29–61, Spring 2005.
- [Ron05] RONNING G.: *Statistische Methoden in der empirischen Wirtschaftsforschung*. Lit-Verlag, 2005.
- [Shr04] SHREVE S. R.: *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer-Verlag, 2004.
- [Sor97] SORENSEN M.: *Estimating Functions for Discretely Observed Diffusions: A Review*. IMS Lecture Notes - Monograph Series, 32:305–325, 1997.
- [Uhr02] UHRIG HOMBURG M.: *Die Erwartungstheorie der Zinsstruktur und Zinsswaps*. Karlsruher Transfer, 16(28):17–19, 2002.
- [Vas77] VASICEK O.: *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*. Journal of Financial Economics, 5:177–188, 1977.
- [Wil01] WILKENS M., BAULE R., ENTROP O.: *Risikoprämien in Optionspreisen: Reale und risikoneutrale Welten und die Beurteilung von Derivaten*. Working paper, 2001.

# A Anhang

## A.1 Stochastische Grundlagen

Die folgenden Definitionen und Sätze sowie die dazugehörigen Beweise sind in Günther und Jüngel (2003) und in Shreve (2004) zu finden. Sei im Folgenden  $(\Omega, F, (F_t), P)$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

**Definition A.1.1** (Stochastischer Prozess). *Ein (stetiger) **stochastischer Prozess**  $\{X_t; t \geq 0\}$  ist eine Familie von Zufallsvariablen  $X : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $t \mapsto X(\omega, t)$  eine stetige Funktion  $\forall \omega \in \Omega$  ist.  $\omega \mapsto X(\omega, t)$  ist eine Zufallsvariable und man schreibt  $X_t = X(t) = X(\cdot, t)$ .*

Ein stochastischer Prozess ist demnach eine funktionenwertige Zufallsvariable und ein besonderer stochastischer Prozess ist durch den Wiener-Prozess (Standard Brownsche Bewegung) gegeben.

**Satz A.1.1** (Wiener-Prozess). *Es gibt einen stetigen stochastischen Prozess  $W_t$  mit den Eigenschaften*

1.  $W_0 = 0$  ( $P$ -) fast sicher, d.h.  $P(\{\omega \in \Omega : W_0(\omega) = 0\}) = 1$ .
2.  $\forall 0 \leq s \leq t$  gilt:  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$  und
3.  $\forall 0 \leq r \leq u \leq s \leq t$  gilt:  $W_t - W_s$  und  $W_u - W_r$  sind unabhängig.

Der stochastische Prozess  $W_t$  wird **Wiener-Prozess** genannt.

Aus 2. folgt, dass  $W_t \sim N(0, t)$  ist und das  $E[(W_t - W_s)^2] = t - s$ . Eine größere Klasse von stochastischen Prozessen lässt sich nun mit Hilfe des Wiener-Prozesses definieren. Die zufälligen Störungen einer sogenannten stochastischen Differentialgleichungen werden durch die additive Hinzunahme von Wiener-Prozessen erzeugt. Bevor die Definition einer stochastischen Differentialgleichung angegeben werden kann, benötigt man die Definition eines Integrals bezüglich des Wiener-Prozesses.

**Definition A.1.2** (Itô-Integral). *Das **Itô-Integral** mit dem Integrator  $W_t$  ist gegeben durch*

$$\int_0^t X_s dW_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}),$$

wobei  $X_s$  ein stochastischer Prozess und  $0 < t_1 < \dots < t_n = t$  Partitionen von  $[0, t]$  mit  $\max |t_{i+1} - t_i| : i = 0, \dots, n-1 \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) seien.

**Definition A.1.3** (Stochastische Differentialgleichung von Itô). Eine **stochastische Differentialgleichung von Itô** ist gegeben durch

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $X(t)$  ein stochastischer Prozess,  $W_t$  der Wiener-Prozess und  $\mu, \sigma$  geeignete (d.h. hinreichend reguläre) Funktionen seien. Die Gleichung ist die symbolische Schreibweise für die Integralgleichung

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s. \quad (\text{A.2})$$

Erfüllt ein stochastischer Prozess die Gleichung (A.2), so heißt er **Itô-Prozess**. Der Term  $\mu(t, X(t))$  wird Driftterm und  $\sigma(s, X(s))$  Diffusionsterm genannt.

Als nächstes wird ein zentrales Hilfsmittel für die Behandlung von Itô-Prozessen (eine Art „Kettenregel“) eingeführt. Das **Lemma von Itô** zeigt, dass für einen Itô-Prozess  $X_t$  und eine reguläre Funktion  $f$  auch  $f(t, X_t)$  ein Itô-Prozess ist.

**Lemma 1** (Itô). Seien  $X_t$  ein Itô-Prozess und  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Dann ist der stochastische Prozess  $f_t = f(t, X_t)$  ein Itô-Prozess, und es gilt:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial X} dW. \quad (\text{A.3})$$

Eine spezielle Klasse von stochastischen Prozessen spielt in der modernen Finanzmathematik eine zentrale Rolle. Dabei handelt es sich um die sogenannten **Martingale**.

**Definition A.1.4** (Filtration). Eine Familie  $\mathbb{F} = (F_t, t > 0)$  von  $\sigma$ -Algebren mit  $F_t \subset F \ \forall t > 0$ , heißt **Filtration**, falls  $F_s \subset F_t \ \forall s, t > 0$  mit  $s \leq t$

**Definition A.1.5** (Martingal). Ein stochastischer  $F_t$ -messbarer Prozess  $X_t$  heißt

- *Super-Martingal*, falls  $\forall 0 \leq s \leq t$  gilt:  $E[X_t | F_s] \leq X_s$
- *Sub-Martingal*, falls  $\forall 0 \leq s \leq t$  gilt:  $E[X_t | F_s] \geq X_s$
- *Martingal*, falls  $\forall 0 \leq s \leq t$  gilt:  $E[X_t | F_s] = X_s$

Somit sind Martingale beispielsweise zur Modellierung von Glücksspielen geeignet. Stellt  $X_n$  das Vermögen eines Spielteilnehmers nach der  $n$ -ten Runde dar, so sollte ein faires Spiel

$$E[X_{n+1} | F_n] = X_n$$

erfüllen.  $F_n$  bedeutet, dass alle Informationen des Spielverlaufs bis zum Zeitpunkt  $n$  bekannt sind. Die Martingaleigenschaft eignet sich daher zur Modellierung von Arbitragefreiheit in Finanzmärkten. Des Weiteren spielt das **Girsanov Theorem** eine wichtige Rolle beim Rechnen mit stochastischen Differentialgleichungen. Man möchte wissen, wie sich die Dynamik bei einem Wechsel des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes ändert.

Sei  $M_t$  die Radon-Nikodym Ableitung von  $Q$  bezüglich  $P$ . Dann gilt:

**Lemma 2.** *Sei  $X$  eine  $F_t$ -messbare Zufallsvariable und  $s, t$  mit  $0 \leq s \leq t \leq T$ . Dann folgt*

$$E_Q[X|F_s] = \frac{1}{M_s} E_P[X M_t | F_s]$$

**Satz A.1.2** (Girsanov). *Sei  $W_t, 0 \leq t \leq T$ , eine Standard Brownsche Bewegung und  $\Theta_t, 0 \leq t \leq T$ , ein adaptierter (d.h.  $\Theta_t$   $F_t$ -messbar) Prozess. Man definiert*

$$M_t = \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t \Theta_s^2 ds - \int_0^t \Theta_s dW_s^P \right), \quad (\text{A.4})$$

$$W_t^Q = W_t^P + \int_0^t \Theta(s) ds, \quad (\text{A.5})$$

unter der technischen Annahme

$$E \left[ \int_0^T \Theta_s^2 M_s^2 ds \right] < \infty. \quad (\text{A.6})$$

Daraus folgt, dass  $Q$  äquivalent zu  $P$  ist und  $W_t^Q, 0 \leq t \leq T$ , eine Standard Brownsche Bewegung darstellt.

## A.2 Zinsstrukturen

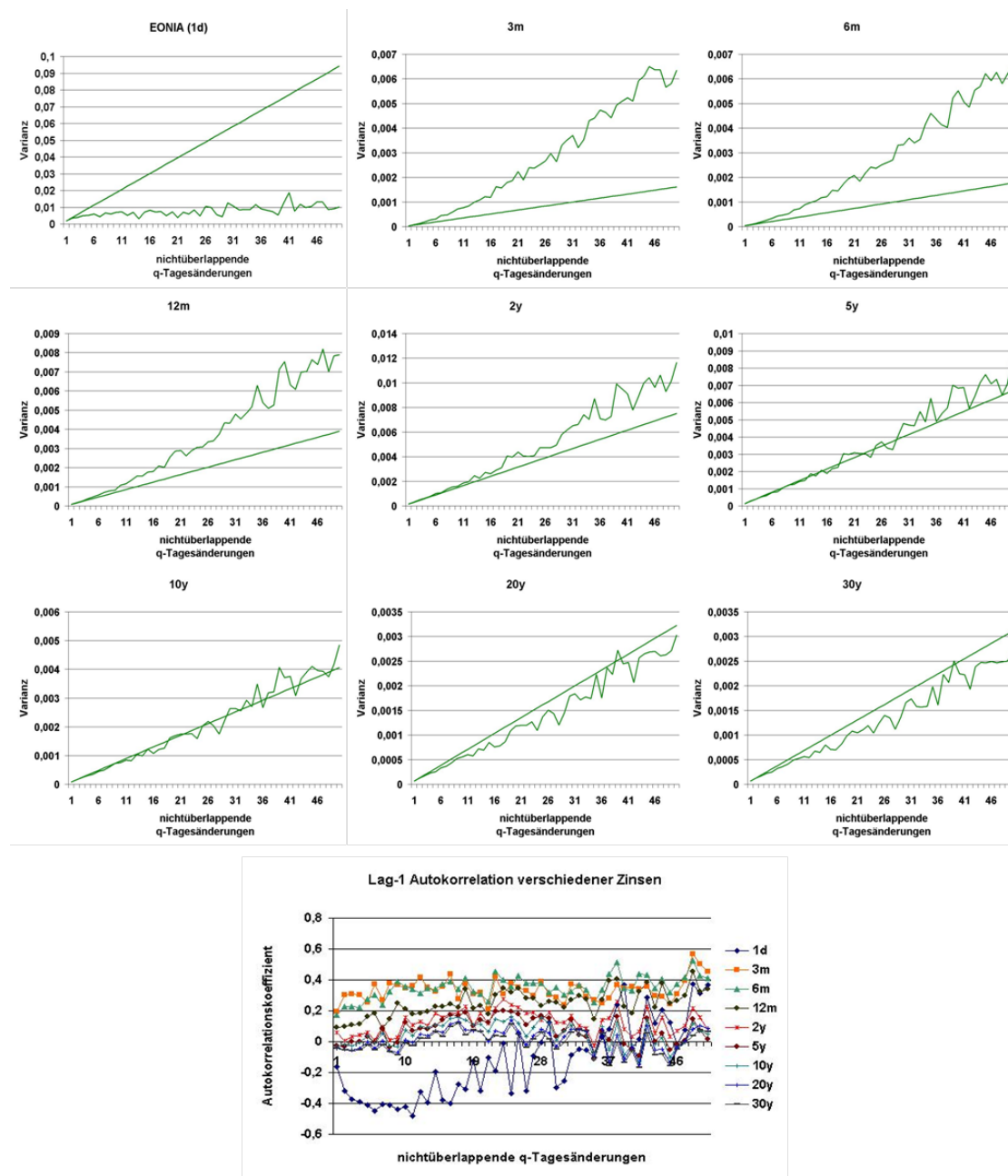
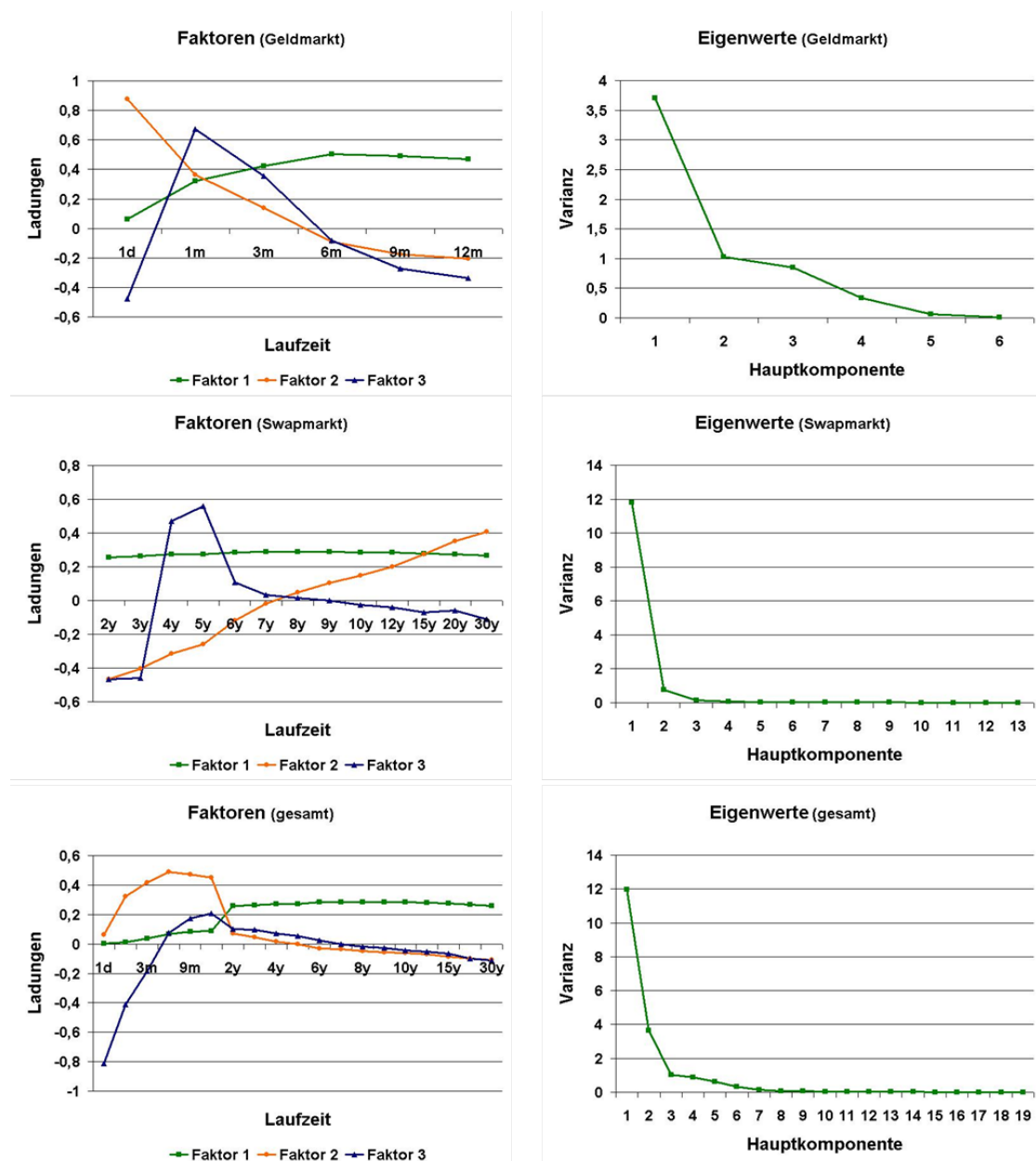


Abbildung A.1: Oben: Varianzen der nichtüberlappenden q-Tagesänderungen;  
 Unten: Lag-1 Autokorrelationen der nichtüberlappenden q-Tagesänderungen





**Abbildung A.2:** Eigenwerte und Eigenvektoren (Faktoren) der EURIBOR Zinssätze von Januar 1999 bis Juli 2008 für die gesamte Zinskurve sowie getrennt für den Geld- und Swapmarkt

## A.3 Reale vs. risikoneutrale Welt am Beispiel des Binomialmodells

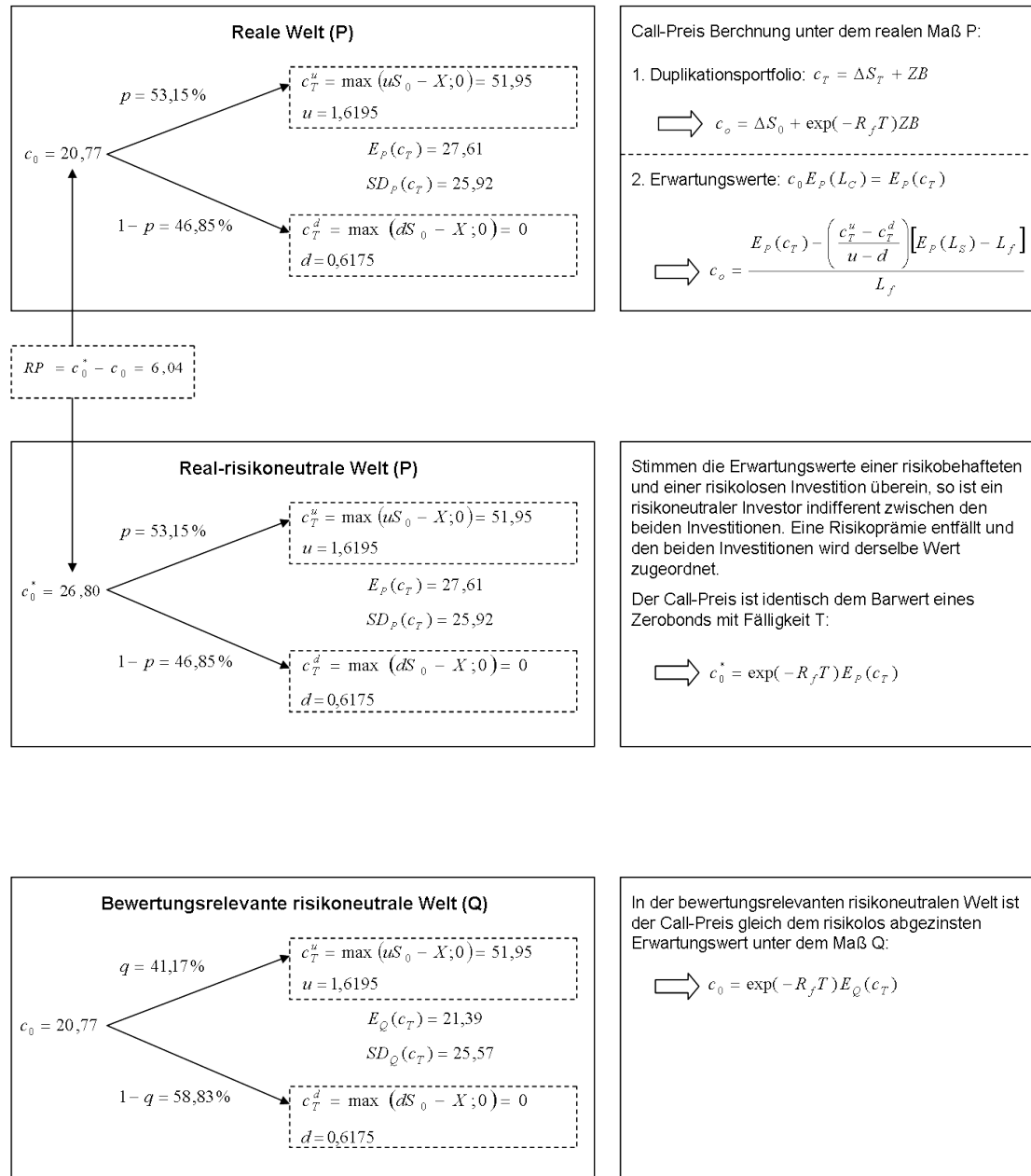


Abbildung A.3: Callpreisbewertungen im Binomialmodell

## A.4 CIR Modell

```
'Edgar Bürger Oktober 2008 - VBA Code des CIR1 Modells
'-----

Option Explicit
Public k
Public k_tilde
Public x
Public sigma
Public j_max
Public i_max
Public i
Public T()
Public r()
'-----

Function CIR(k_read As Double, k_tilde_read As Double, _
b_read As Double, sigma_read As Double, r0_read As Double)

Dim p
Dim p_max
p_max = 150
Dim j As Double
j_max = 19
i_max = 400
'Function Inputs
k = k_read
k_tilde = k_tilde_read
x = b_read
sigma = sigma_read
Dim Theta_tilde As Double
Theta_tilde = x / k_tilde
'Shortrate
Dim delta As Double
delta = 1 / 365
ReDim T(1 To j_max)
'Zeitpunkte einlesen
For j = 1 To 19
    T(j) = Worksheets("Kalibrieren").Cells(4 + j, 2).Value
```

```
Next j

ReDim r(0 To i_max)
Dim Theta As Double
Theta = 0.0514
Dim Bonds1()
ReDim Bonds1(0 To i_max + 150, 1 To j_max, 1 To p_max)
Dim Bonds2()
ReDim Bonds2(i_max + 150, 1 To j_max)
Dim zinsen()
ReDim zinsen(0 To i_max + 150, 1 To j_max, 1 To p_max)
Dim dW As Double

For p = 1 To p_max
    r(0) = r0_read
    i = 1
    'Startkurve
    Bonds2 = BP(r(0))

    For j = 1 To j_max
        Bonds1(0, j, p) = Bonds2(i, j)
    Next j

    For j = 1 To j_max
        zinsen(0, j, p) = -(Log(Bonds1(0, j, p)) / T(j))
    Next j

    Do
        dW = delta ^ (0.5) * random_gaussian()
        r(i) = r(i - 1) + (k * (Theta - r(i - 1)) * delta +_
            sigma * (r(i - 1) ^ 0.5) * dW)
        Bonds2 = BP(r(i))

        For j = 1 To j_max
            Bonds1(i, j, p) = Bonds2(i, j)
        Next j
```

```

For j = 1 To j_max
    zinsen(i, j, p) = -(Log(Bonds1(i, j, p)) / T(j))
Next j

```

```

i = i + 1
Loop While i <= i_max
Next p
'Ausgabe
Dim p_i_max
p_i_max = p_max * i_max + 150
Dim p_count
p_count = 1
Dim ausgabe()
ReDim ausgabe(1 To p_i_max, 1 To j_max)

```

```

For p = 1 To p_max
    For i = 0 To i_max
        For j = 1 To j_max
            ausgabe(p_count, j) = zinsen(i, j, p)
        Next j
        p_count = p_count + 1
    Next i
Next p
CIR = ausgabe
End Function

```

```

'-----

```

```

Function BP(r_t_read) 'Bondpreise

```

```

Dim j, r_t, n_A, n_C
r_t = r_t_read
Dim z()
ReDim z(1 To j_max)
Dim y, h, kh
y = (2 * x) / (sigma ^ 2)
h = ((k ^ 2) + 2 * (sigma ^ 2)) ^ 0.5
kh = k + h
'Bondpreise

```

```

Dim B()
ReDim B(0 To i_max + 150, 1 To j_max)
Dim A()
ReDim A(0 To i_max + 150, 1 To j_max)
Dim C()
ReDim C(0 To i_max + 150, 1 To j_max)

For j = 1 To j_max
    z(j) = 2 * h + kh * (Exp(T(j) * h) - 1)
Next j
For j = 1 To j_max
    n_A = 2 * h * Exp(kh * T(j) / 2)
    A(i, j) = (n_A / z(j)) ^ y
Next j
For j = 1 To j_max
    n_C = 2 * (Exp(T(j) * h) - 1)
    C(i, j) = n_C / z(j)
Next j
For j = 1 To j_max
    B(i, j) = A(i, j) * Exp(-C(i, j) * r_t)
Next j
BP = B
End Function
'-----
'Simulate a Gaussian variable N(0,1)
Public Function random_gaussian() As Double
    Dim radius As Double, V1 As Double, V2 As Double
    Randomize
    Do
        V1 = 2 * Rnd - 1
        V2 = 2 * Rnd - 1
        radius = V1 ^ 2 + V2 ^ 2
    Loop Until (radius < 1)
    random_gaussian = V2 * Sqr(-2 * Log(radius) / radius)
End Function

```

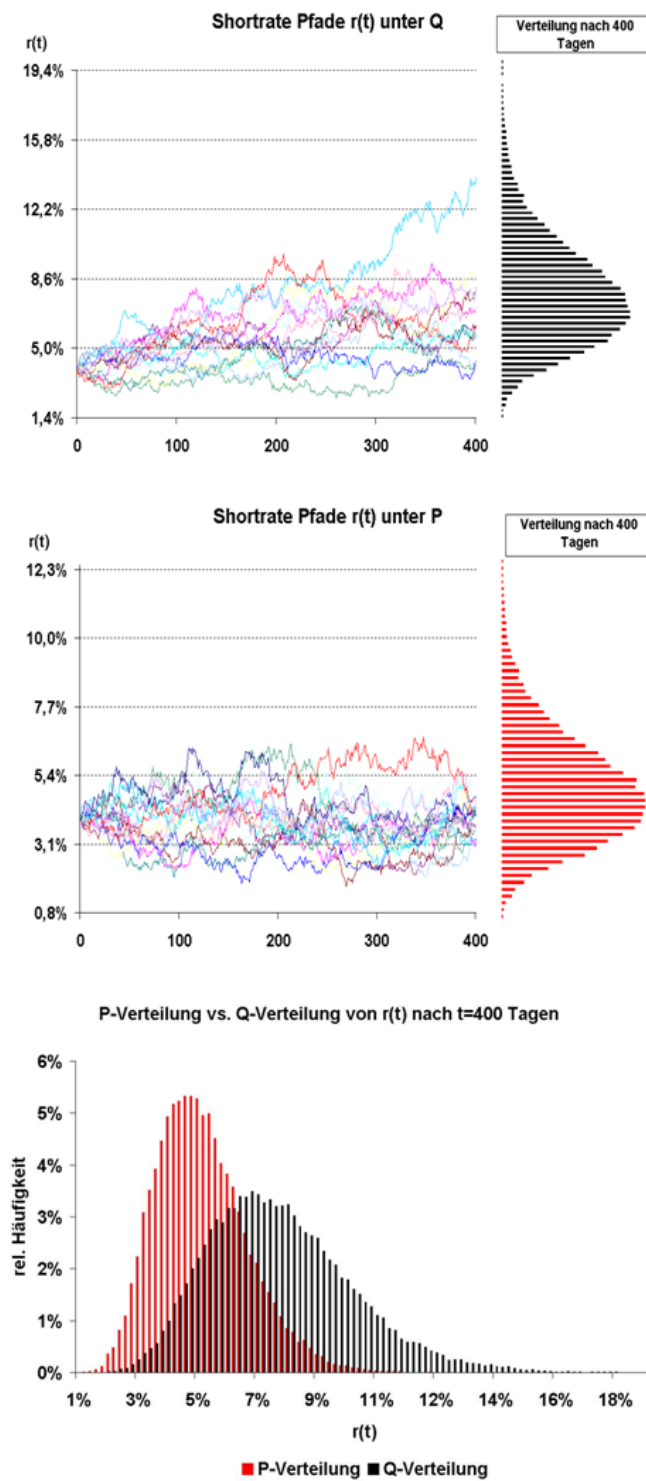


Abbildung A.4: Pfadverläufe der Shortrate und die dazugehörigen Verteilungen unter P und Q

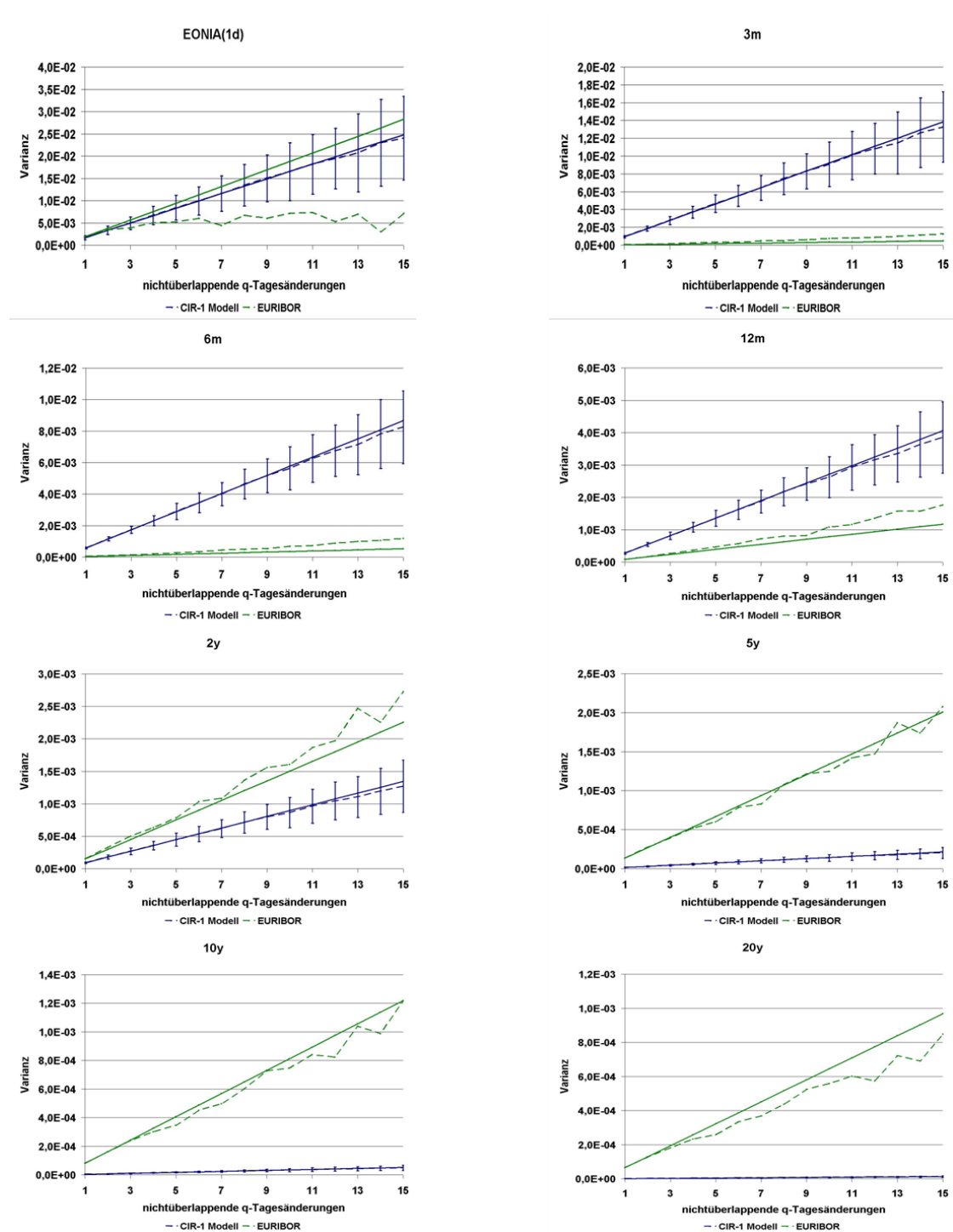


Abbildung A.5: CIR Modell: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen



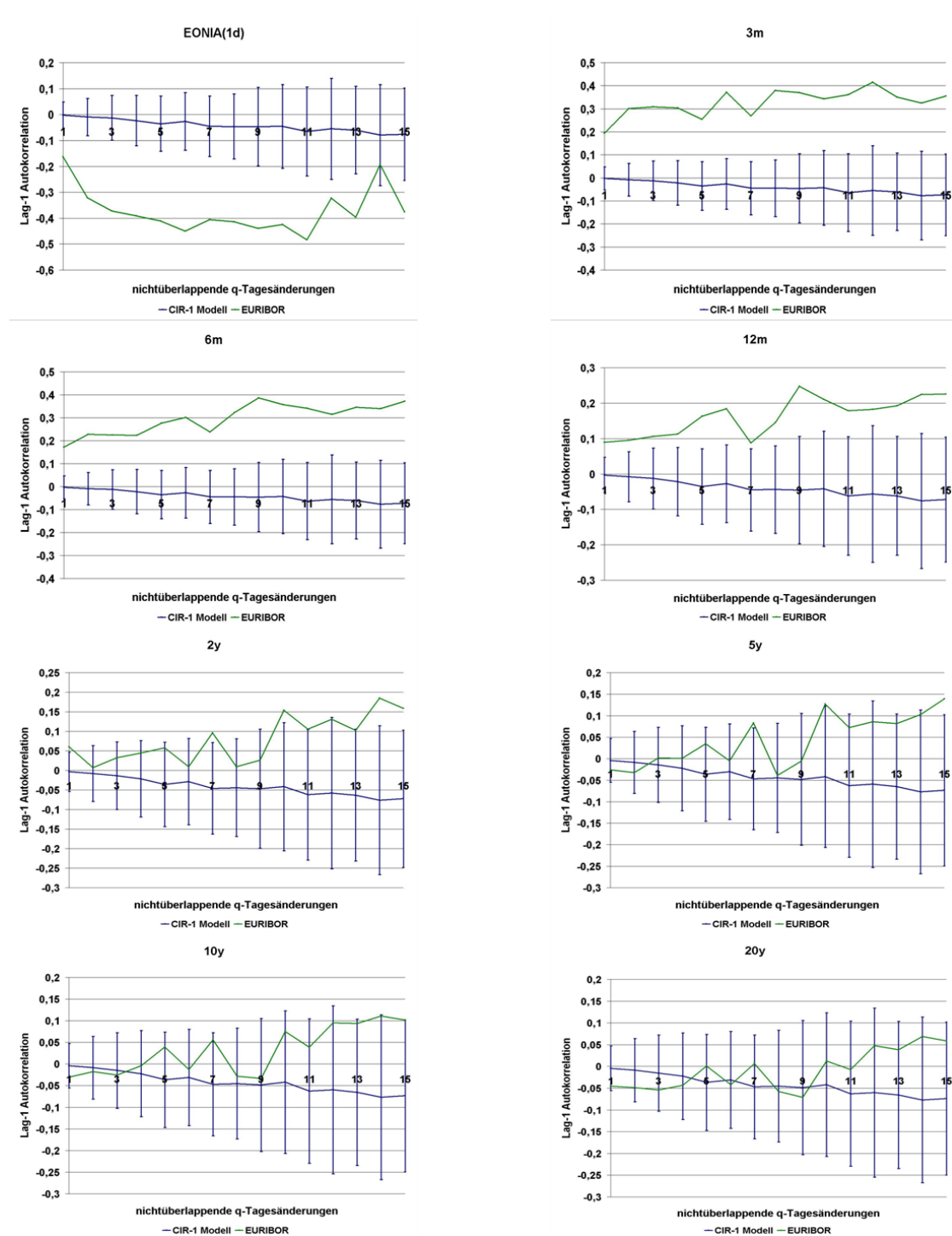


Abbildung A.6: CIR Modell: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

## A.5 Nelson-Siegel Modell

Matlab Code des dynamischen Nelson-Siegel Modells

```
%-----
%Schritt 1: Schätzen der Modellparameter
%-----
n=length(EURIBOR);
for i=1:n
    y=EURIBOR(i,:);
    x=[0.00274 0.083 0.25 0.5 0.75 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 12 15 20 30];
    [para] = ns_fitten(x,y);
    for j=1:3
        theta_NS(i,j) = para.beta(j);
    end
    theta_NS(i,4) = para.tau;
end

function[para] = ns_fitten(x,y)
% Fitten der Nelson-Siegel Kurven
% Output: 'para': enthält die Parameter 'beta' (3*1 Vektor)
%          und 'tau' (Skalar)
% Bemerkung: Die optimalen tau's werden mittels
%             FMINBND in der Range (0,1.3) gesucht.
para.tau = fminbnd(@(tau) opt_theta(tau),0,1.3); %10 normal
para.beta = theta(para.tau);

function[f] = opt_theta(tau)
[F,f] = theta(tau);
end

function[F,varargout] = theta(tau)
i = x(:)*tau;
j = 1-exp(-i);
n = length(x);
H = [ones(n,1) j./i (j./i)+j-1];
F = (H'*H)\(H'*y(:));
E = y(:) - H*F;
varargout(1) = {E'*E};
```

```

    end
end
%-----
%Schritt 2: VAR(1) Modellschätzung
%-----
function [c, A, sigma]=VAR1_fitten(ns_fit)

% n: Anzahl der Beobachtungen; m: Dimension
% der Zustandsvektoren (NS Modell m = 2)
[n,m] = size(ns_fit);

ord = 1; %VAR(p) mit p=1
np = m*ord + 1; %Anzahl der Vektoren
ne = n-1;
%Aufstellen von D
D = zeros(ne,np+m);
D(:,1) = ones(ne,1);
D(:,2:1+m) = [ns_fit(1:n-1, :)];
D(:,np+1:np+m) = [ns_fit(2:n, :)];
%QR Zerlegung nach Higham (normalisiert)
q = np + m;
delta = (q^2 + q + 1)*eps;
scale = sqrt(delta)*sqrt(sum(D.^2));
R = triu(qr([D; diag(scale)]));
% Zerlegung von R
%   | R11  R12 |
% R=|           |
%   | 0    R22 |
R11 = R(1:np, 1:np);
R12 = R(1:np, np+1:np+m);
R22 = R(np+1:np+m, np+1:np+m);
%Zusammengesetzte Matrix B
con = max(scale(2:np+m)) / scale(1);
R11(:,1) = R11(:,1)*con;
B = (R11\R12)';
c = B(:,1)*con;
A = B(:,2:np);

```

```

%Kovarianzmatrix
dof  = ne-np;
sigma  = R22'*R22./dof;
%-----
%Schritt 3: VAR(1) Monte Carlo Simulation
%-----
function [out]=VAR1_simulation(c,A,sigma,n,ndist,beta0,pfade)
% Simulation des VAR1 Prozesses
% Inputs: c,A,sigma: Modellparameter; n: Anzahl der Simulationstage (400);
%         ndist: Startpunkt der Ausgabe z.B. ndist = 0 wird
%         Startzinskurve mit ausgeben, ndist = 1 wird ein
%         Tag nach der Startzinskurve ausgeben usw.;
%         beta0: (1*3) Vektor der Startzinskurven;
%         pfade: Anzahl der Pfade (150).
z=0;
for pfad=1:pfade
    m      = size(sigma,1); % Dimension der Zustandsvektoren
    p      = 1;
    c      = c(:)'; % c als Reihenvektor
    % Überprüfen, ob das Modell stabil ist
    A1     = [A; eye((p-1)*m) zeros((p-1)*m,m)];
    lambda = eig(A1);
    if any(abs(lambda) > 1)
        warning('Das VAR Modell ist nicht stabil.')
    end
    % Cholesky Zerlegung der Kovarianzmatrix
    [R, err]= chol(sigma); % R obere Dreiecksmatrix
    if err ~= 0
        error('Kovarianzmatrix nicht positive definite.')
    end
    % n+ndist unabhängige N(0,1) Zufallsvariablen mit der Kovarianzmatrix
    % C=R'R
    randvec = randn([ndist+n,m])*R;
    randvec = randvec + ones(ndist+n,1)*c;
    % Zustandsvektoren als Reihen
    AT = A';
    u = [beta0; zeros(ndist+n,m)]; %beta0 als Startvektor

```

```

% Simulation von n+ndist Beobachtungen.
for k=2:ndist+n+1;
    x(1,:) = u(k-1,:)*AT;
    u(k,:) = x + randvec(k-1,:);
end
% Ausgabe
v = u(ndist+p:ndist+n+p,:);
for i=1:n
    out(i+z,:)=v(i,:);
end
z=z+n;
end
%-----
%MC Simulation der Nelson-Siegel Kurven
%-----
pfade=150;
t_max=400;
z=0;
for p=1:pfade
    for t=1:t_max
        para.beta = out(t+z,1:3);
        para.tau = 0.6631;
        x=[0.00274 0.083 0.25 0.5 0.75 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 12 15 20 30];
        i = x(:)*para.tau;
        j = 1-exp(-i);
        y = para.beta(1) + para.beta(2)*j./i + para.beta(3)*((j./i)+j-1);
        for j=1:19
            MC_Zinsen(t+z,j)=y(j);
        end
    end
    z=z+400;
end
end

```

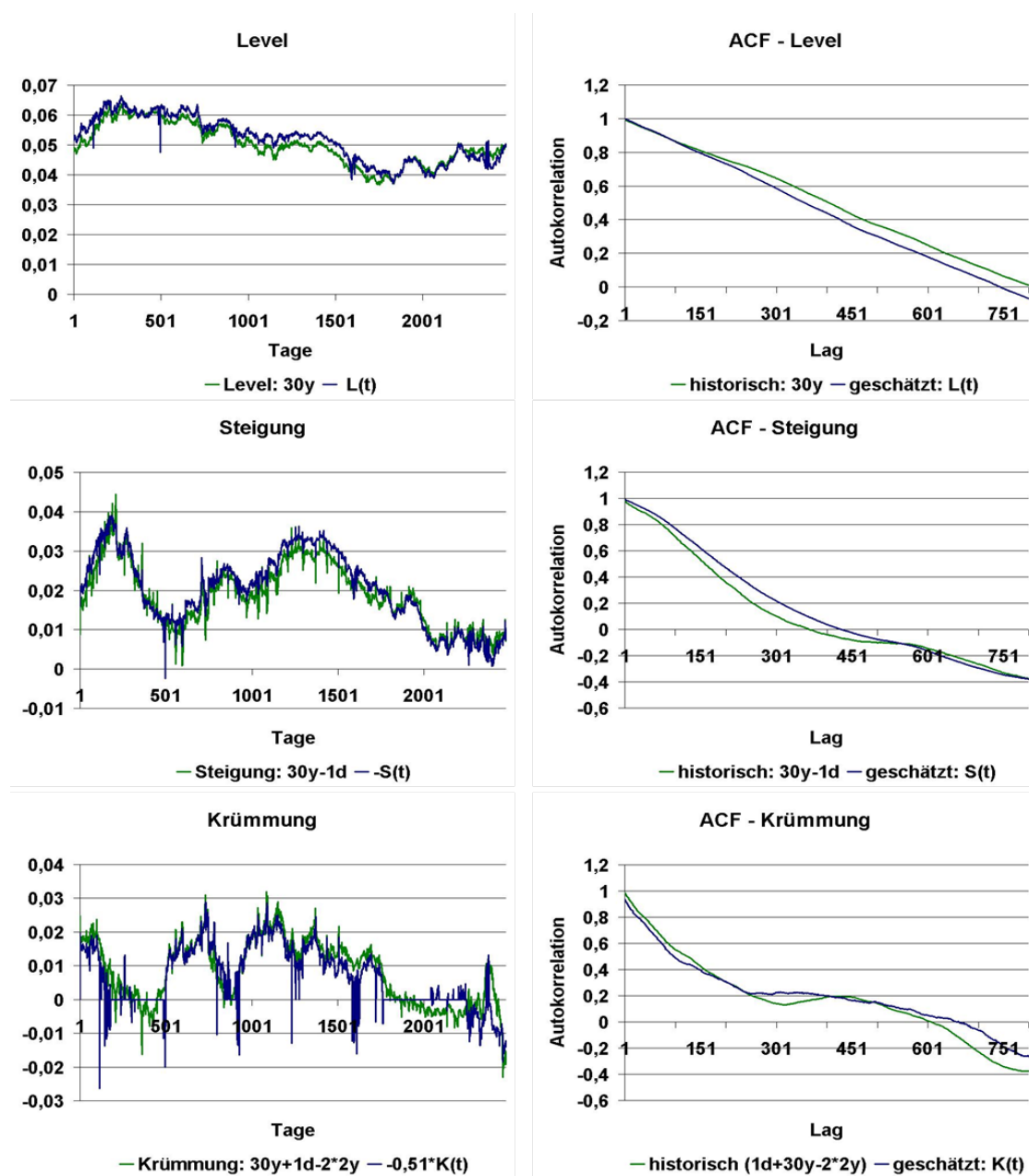
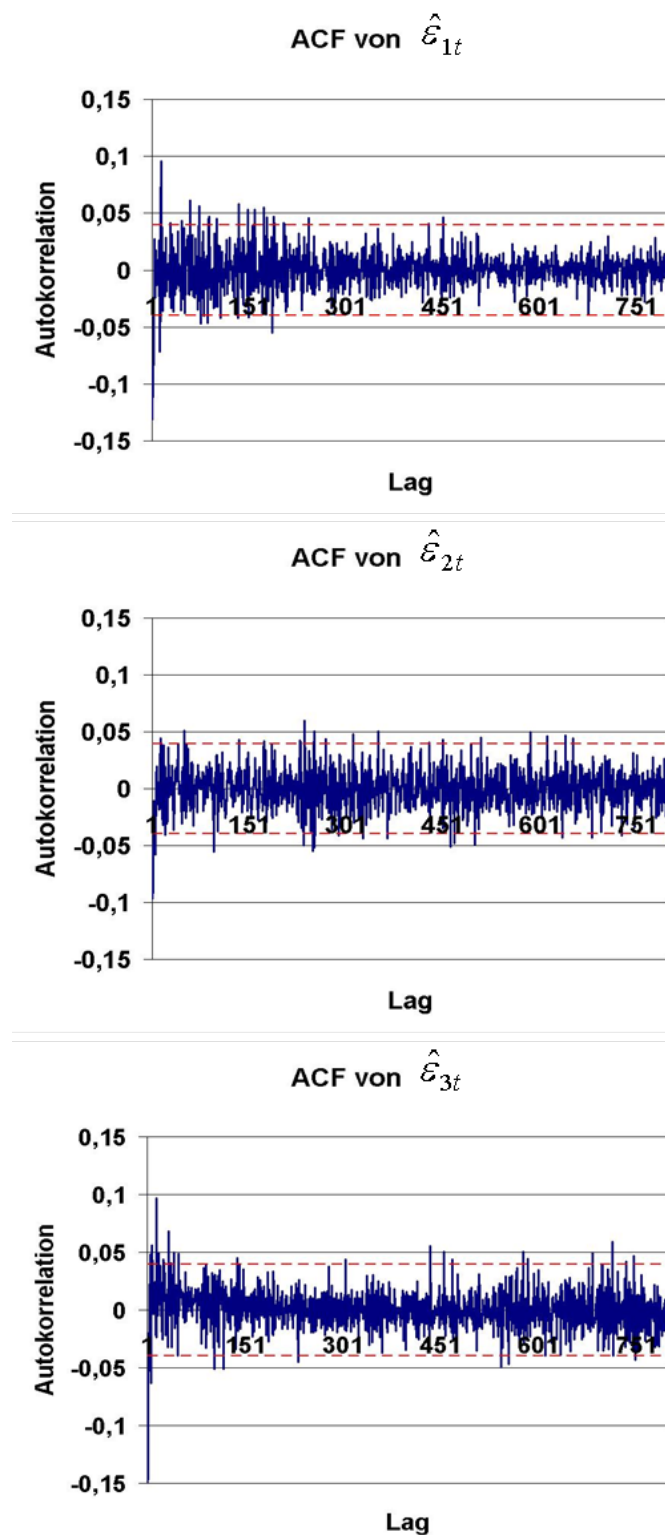


Abbildung A.7: Nelson-Siegel Faktoren vs. empirische Faktoren und die dazugehörigen Autokorrelationsfunktionen



**Abbildung A.8:** Autokorrelationsfunktionen der Residuen  $\hat{\Sigma}$ . Die roten Linien stehen für die Standardfehlerbänder  $\pm \frac{1,96}{\sqrt{T}}$ . Solange sich die Autokorrelation zwischen diesen Bändern befindet, ist sie auf einem Signifikanzniveau von 5% nicht von Null verschieden

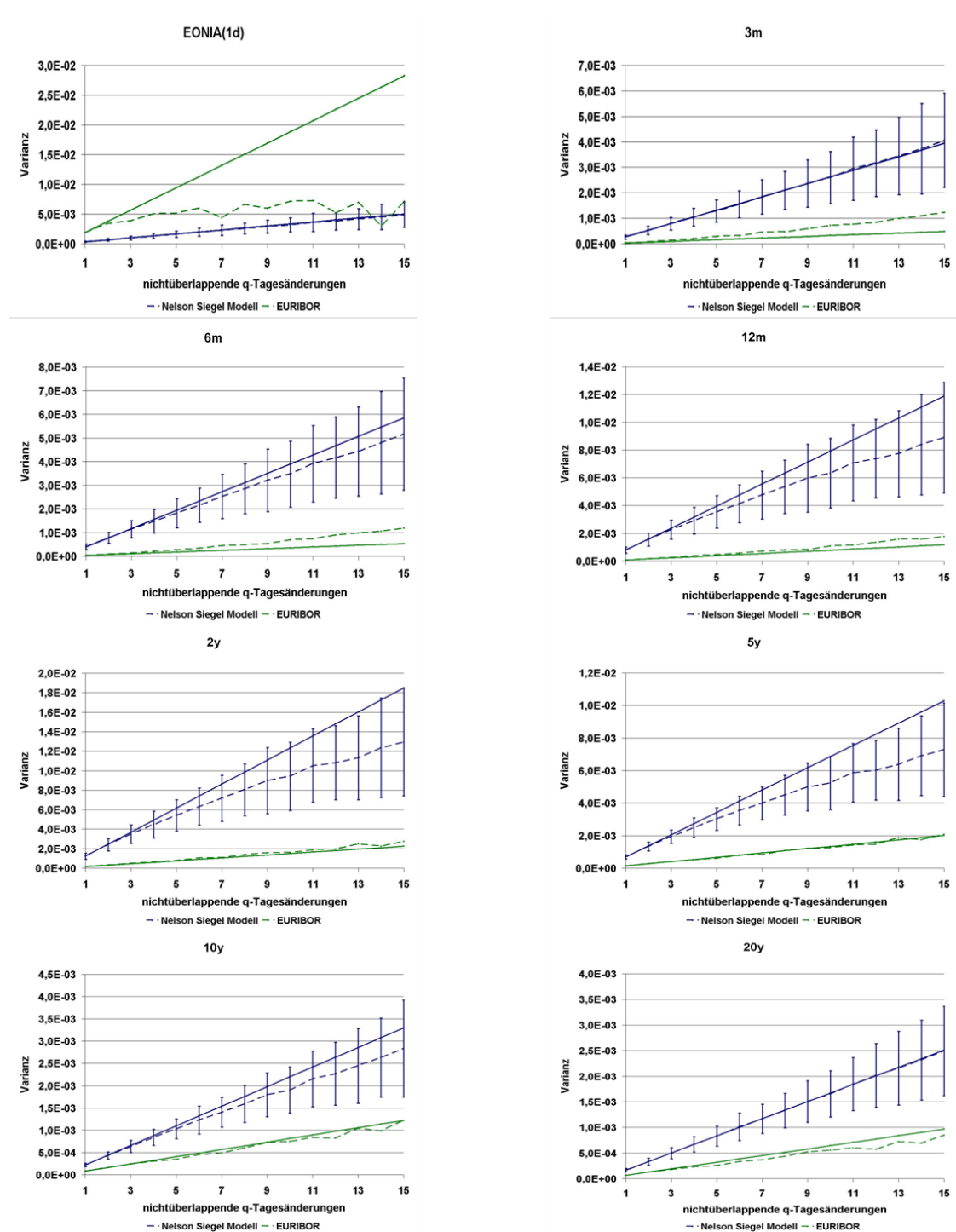


Abbildung A.9: Nelson-Siegel Modell: Varianzen nichtüberlappender  $q$ -Tagesänderungen



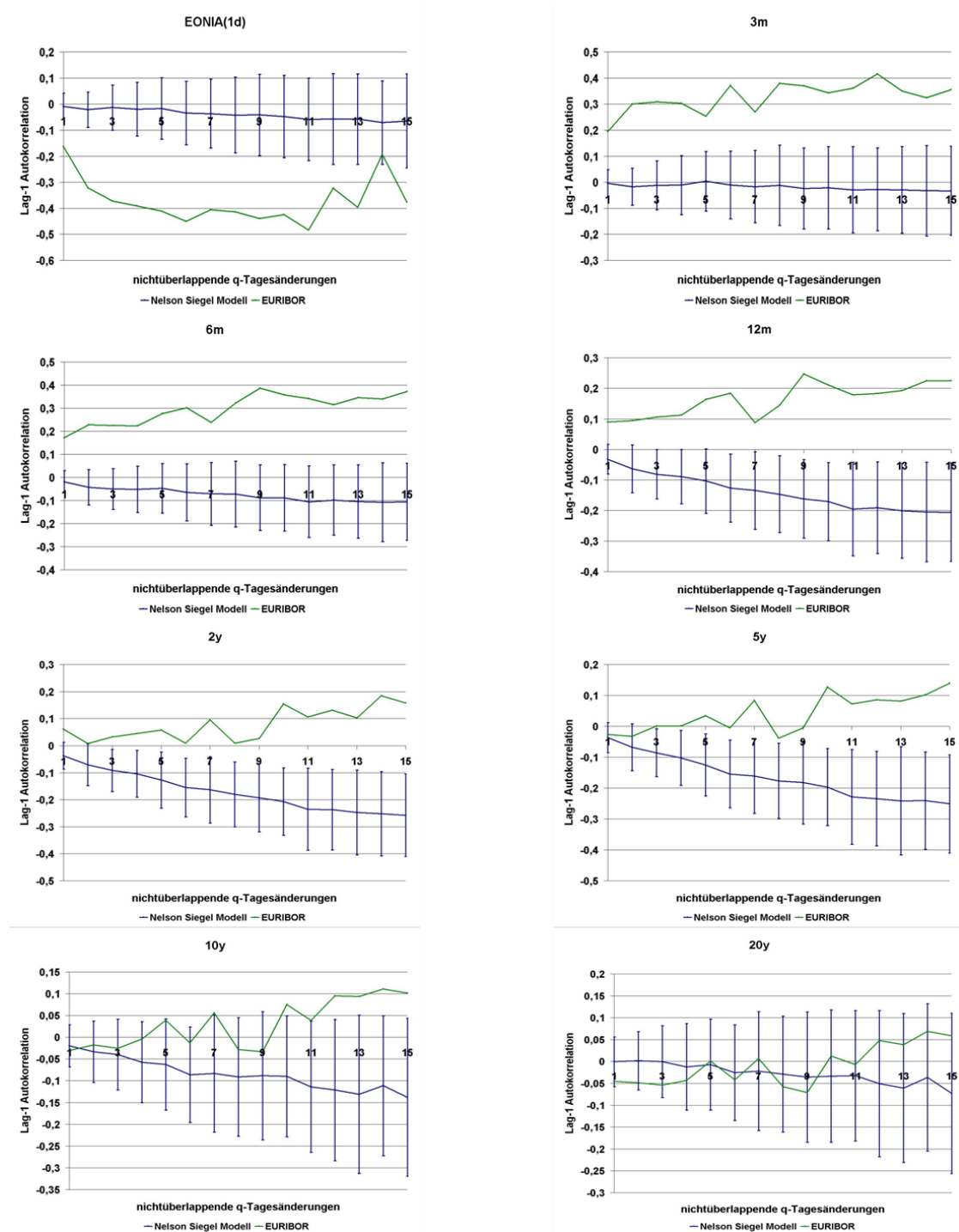


Abbildung A.10: Nelson-Siegel Modell: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

## A.6 RMJBN Modelle

### A.6.1 Modell Version 1

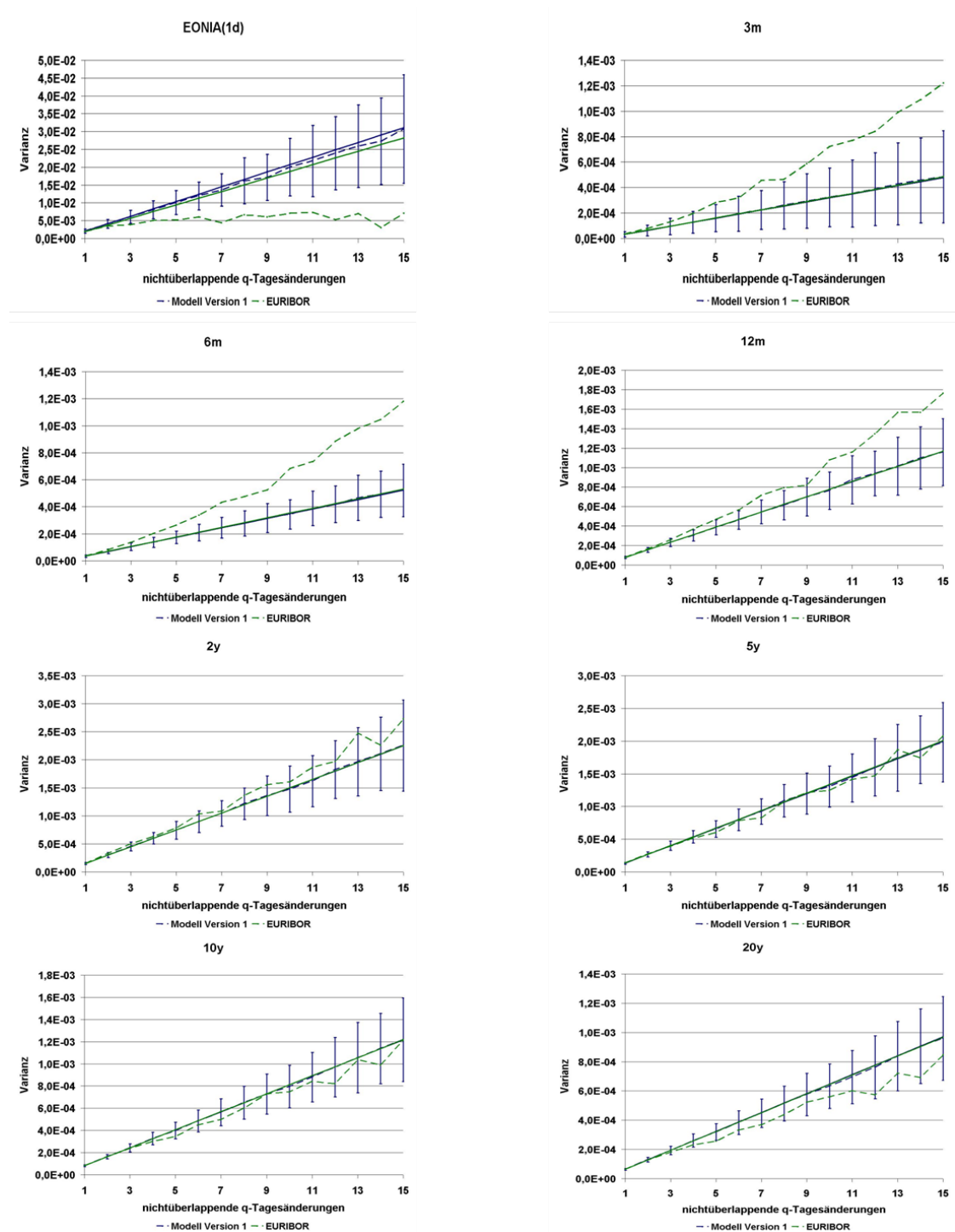


Abbildung A.11: RMJBN Modell Version 1: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

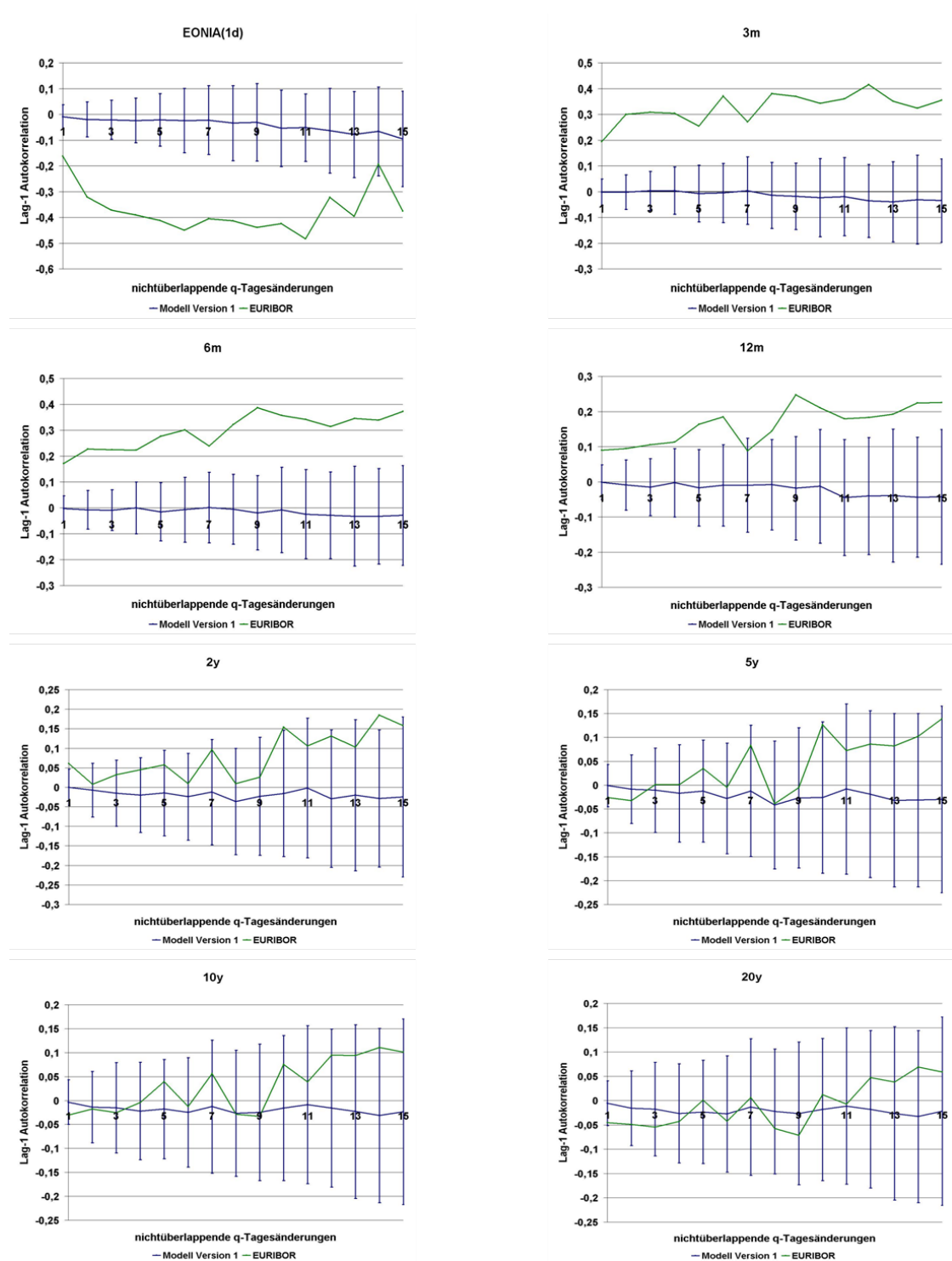


Abbildung A.12: RMJBN Modell Version 1: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

## A.6.2 Modell Version 2

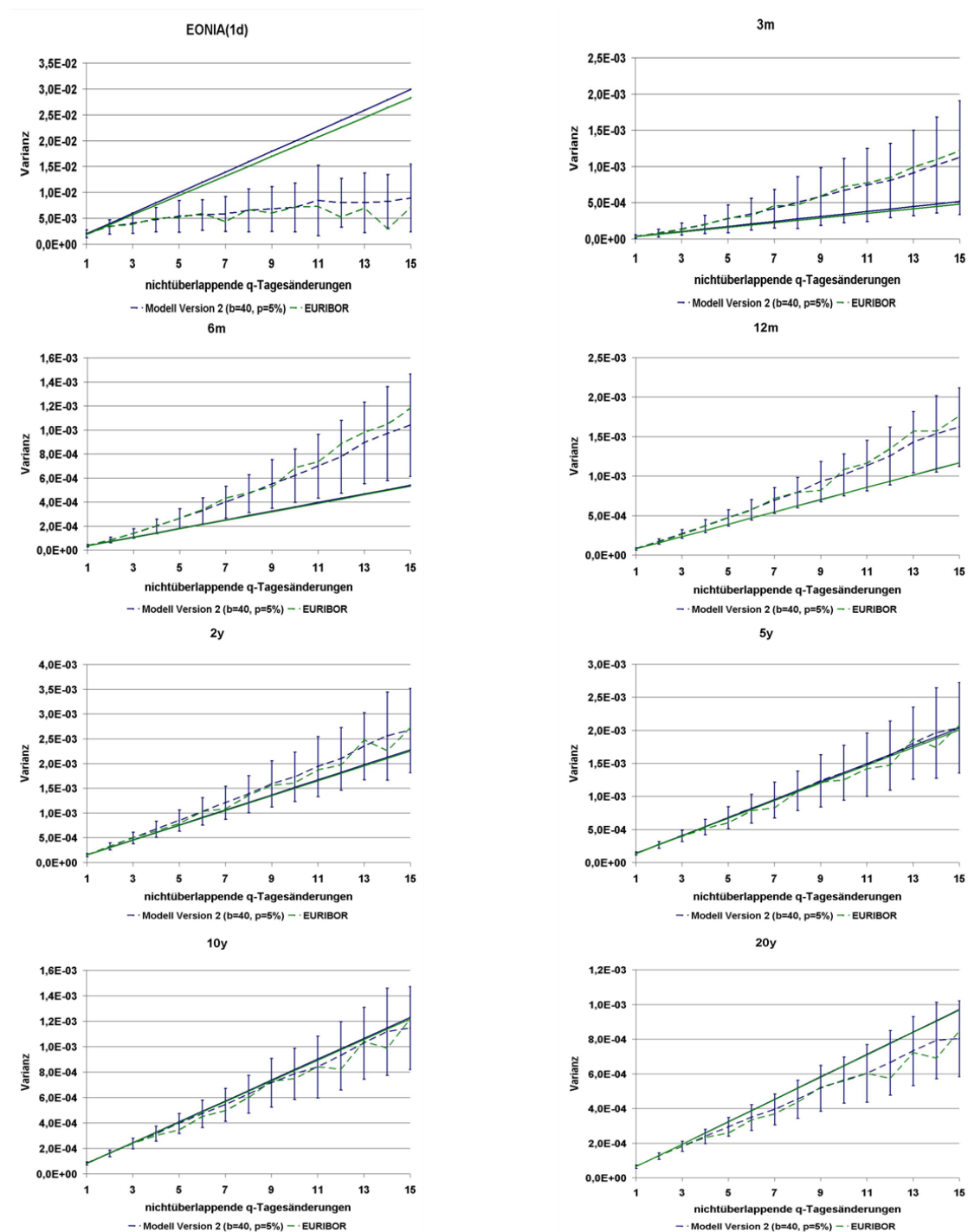


Abbildung A.13: RMJBN Modell Version 2 [ $b = 40, p = 5\%$ ]: Varianzen nichtüberlappender  $q$ -Tagesänderungen

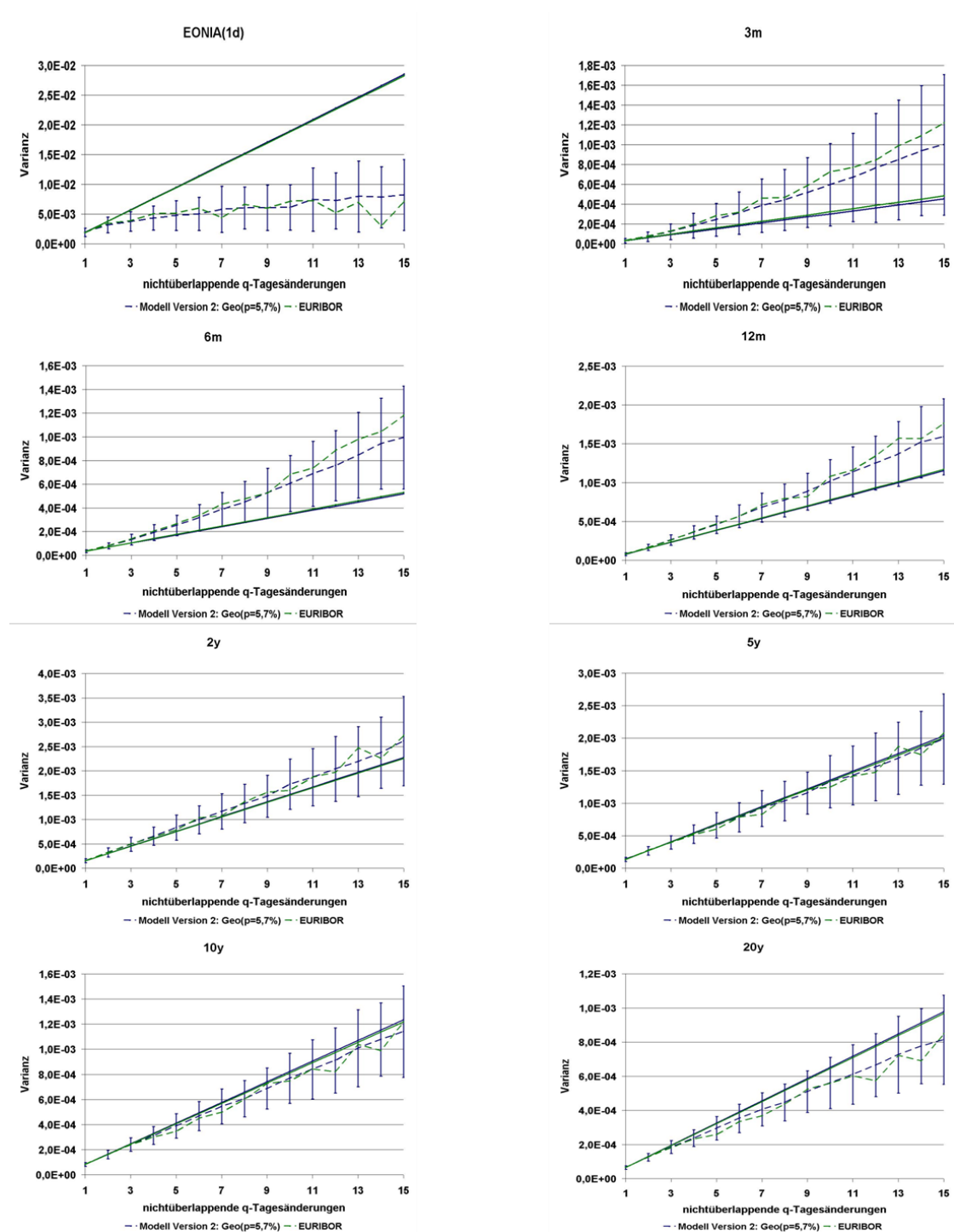
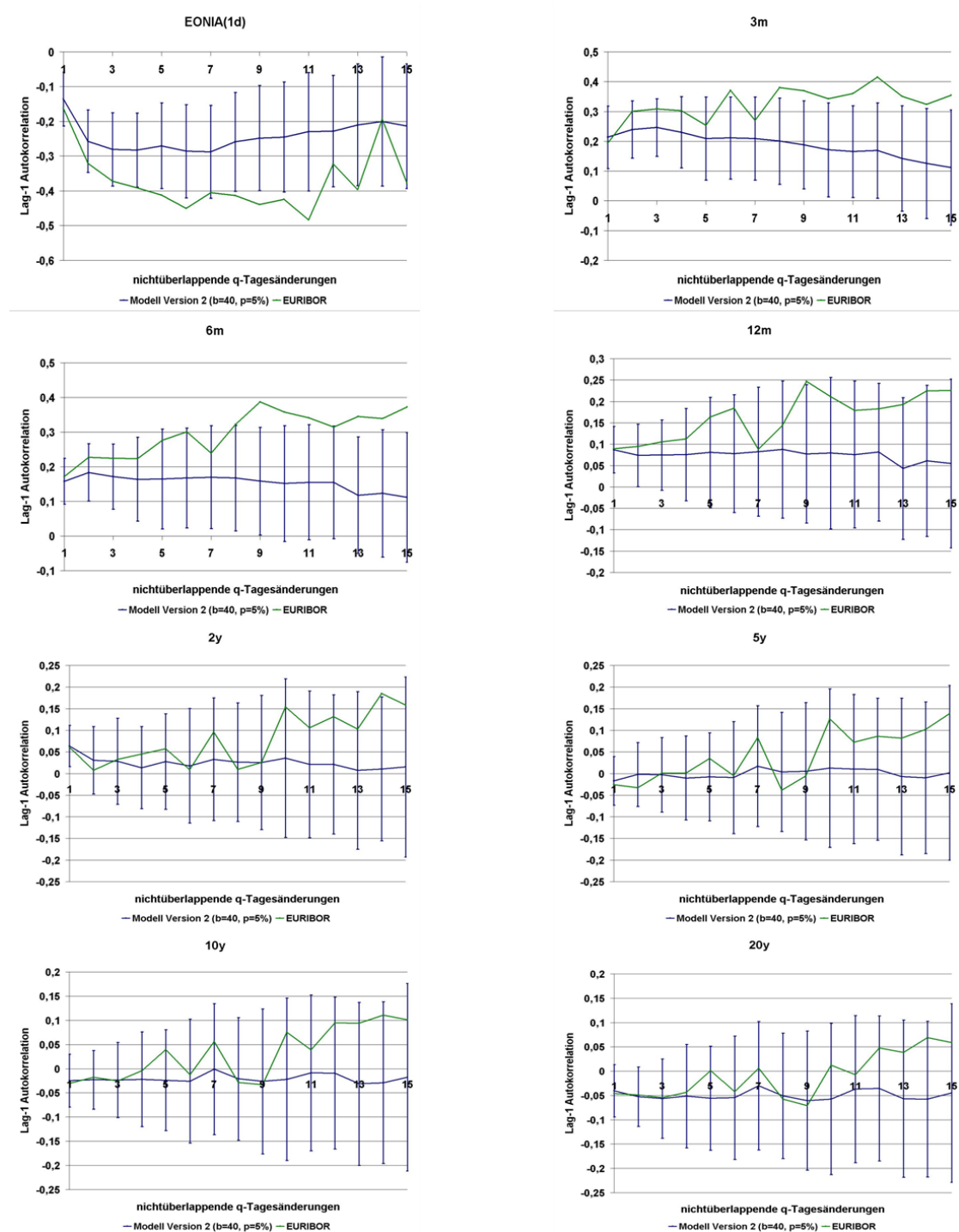
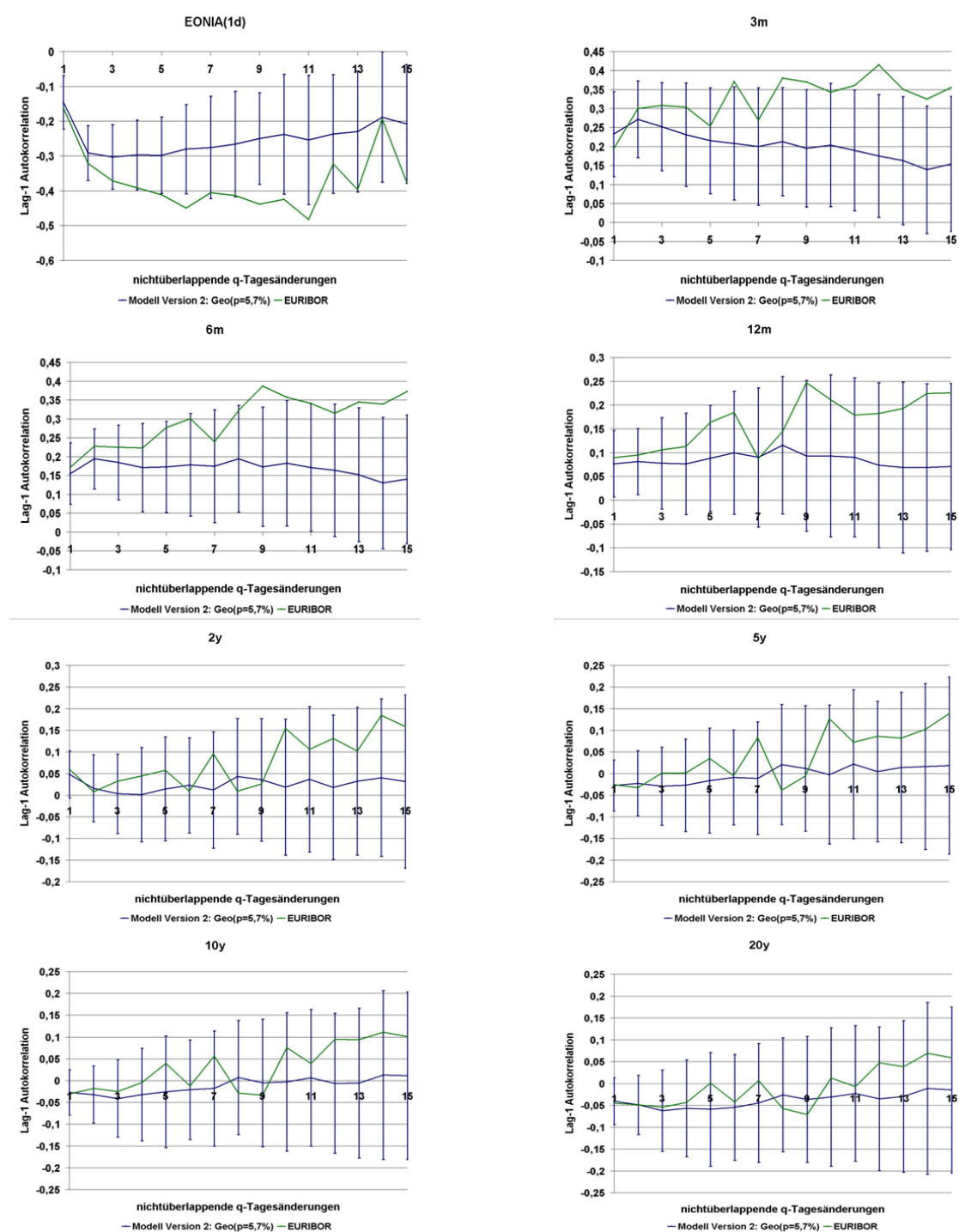


Abbildung A.14: RMJBN Modell Version 2 [Geo(p),  $p = 5,7\%$ ]: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen



**Abbildung A.15:** RMJBN Modell Version 2 [ $b = 40, p = 5\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen



**Abbildung A.16:** RMJBN Modell Version 2 [ $\text{Geo}(p)$ ,  $p = 5,7\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

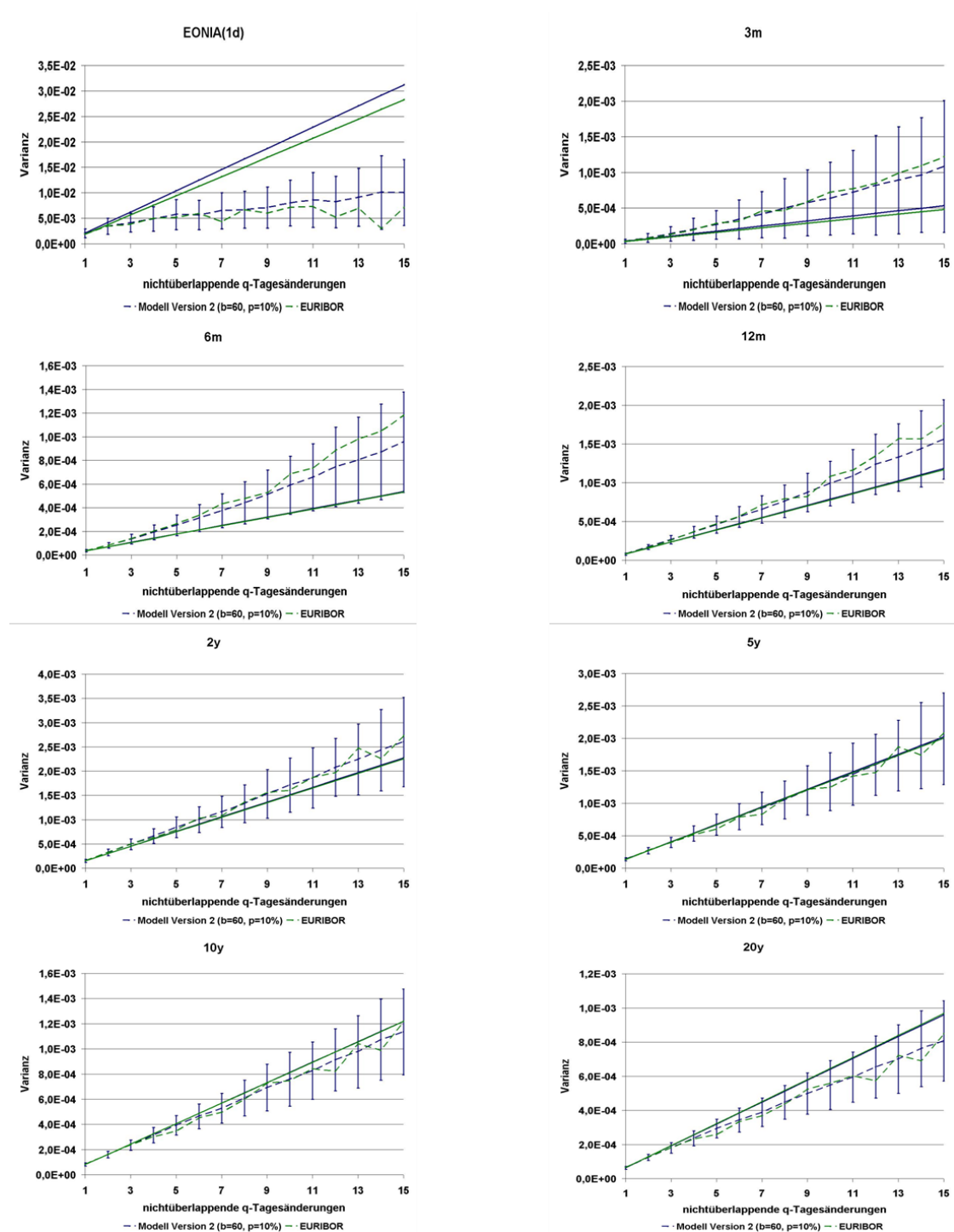


Abbildung A.17: RMJBN Modell Version 2 [ $b = 60, p = 10\%$ ]: Varianzen nicht-überlappender q-Tagesänderungen



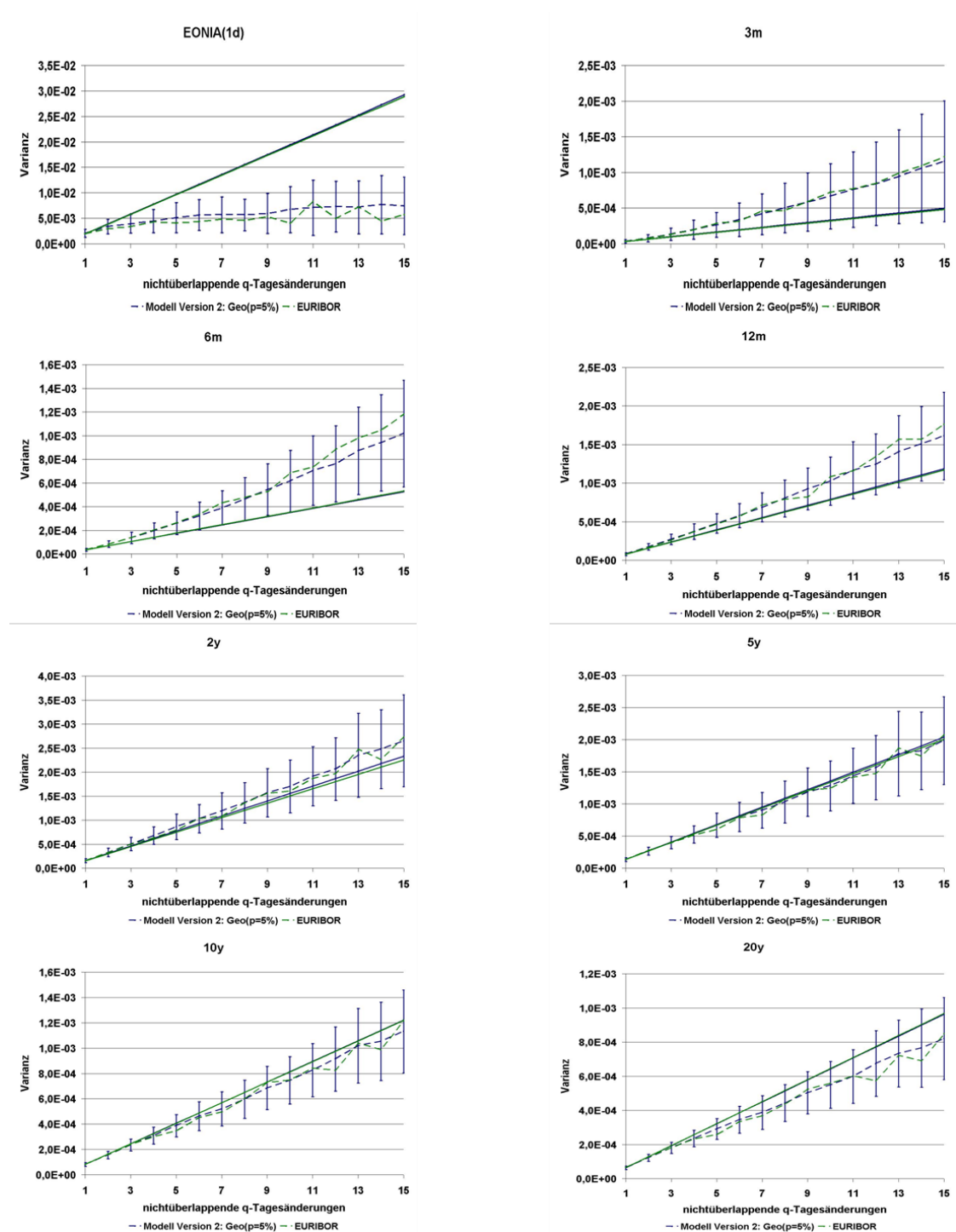
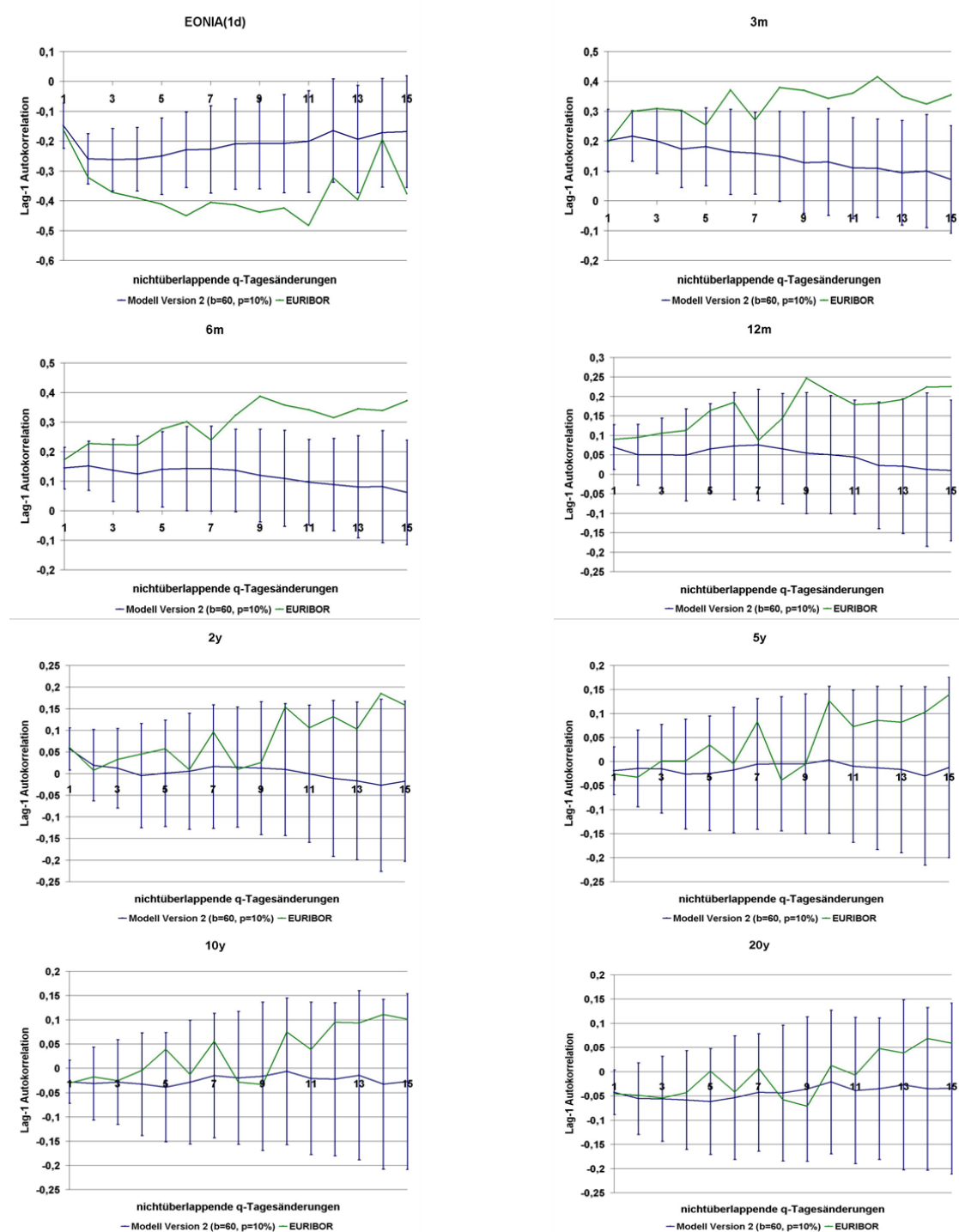


Abbildung A.18: RMJBN Modell Version 2 [Geo(p),  $p = 10\%$ ]: Varianzen nicht-überlappender q-Tagesänderungen



**Abbildung A.19:** RMJBN Modell Version 2 [ $b = 60, p = 10\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

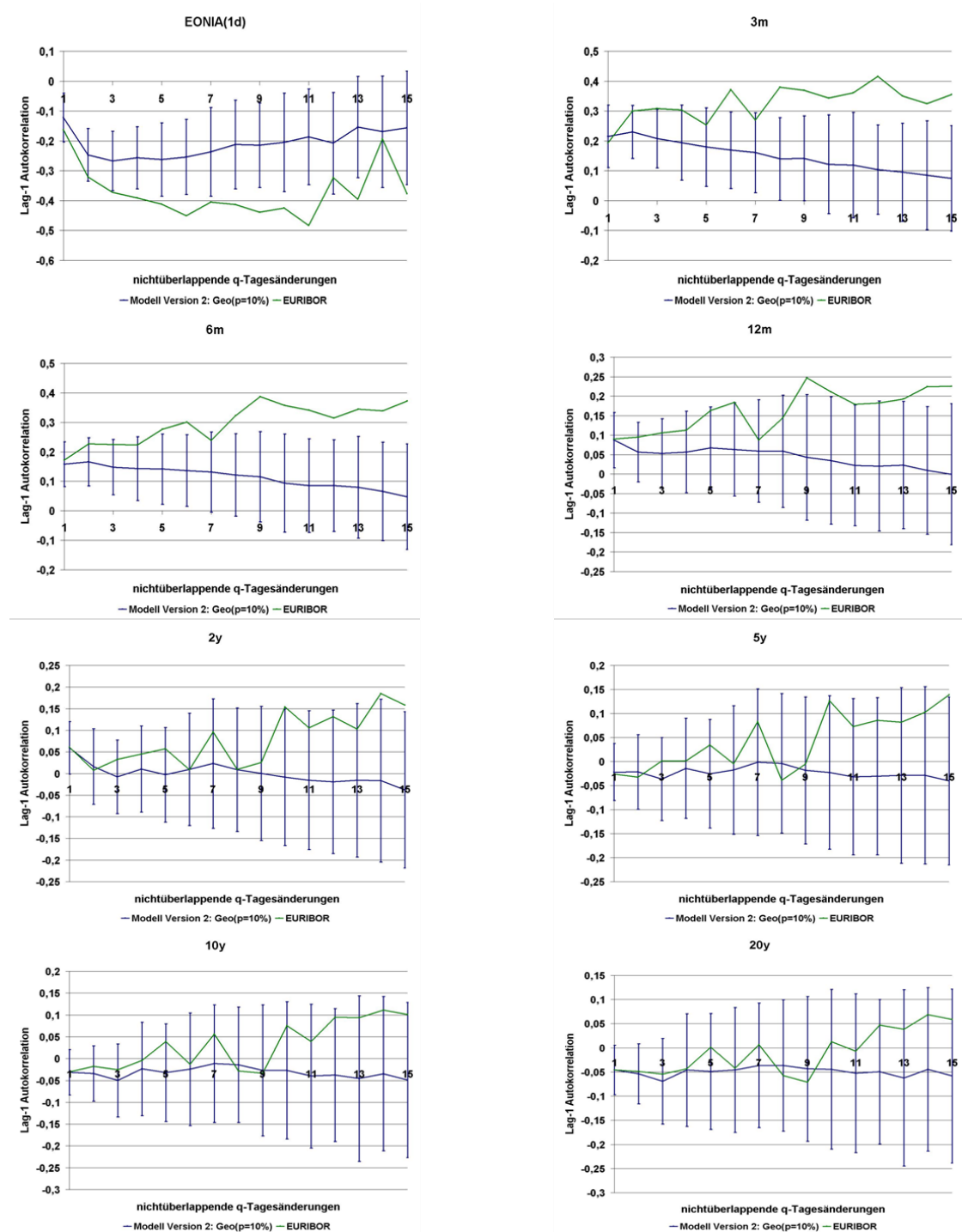


Abbildung A.20: RMJBN Modell Version 2 [Geo(p),  $p = 10\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappenden q-Tagesänderungen

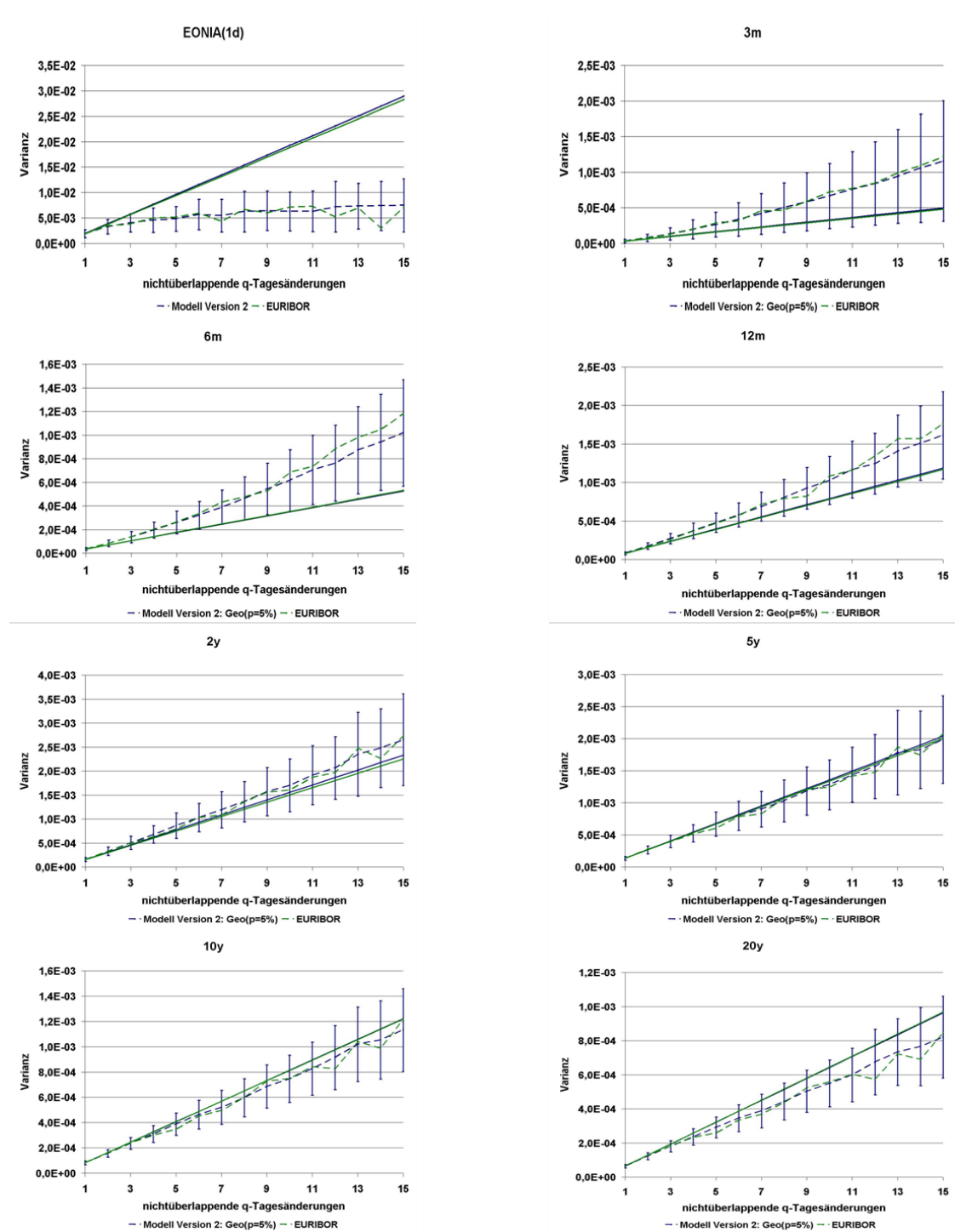
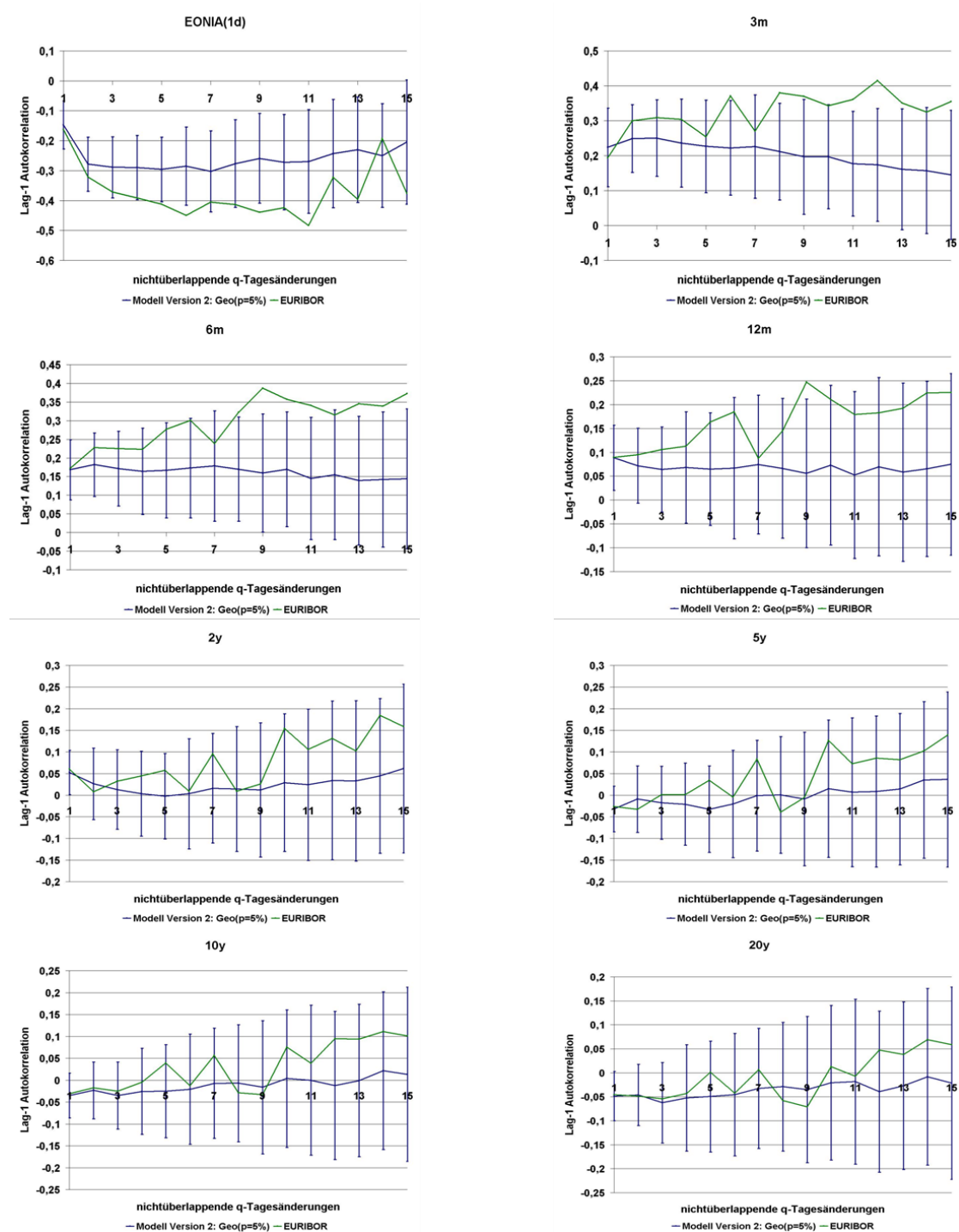


Abbildung A.21: RMJBN Modell Version 2 [Geo( $p$ ),  $p = 5\%$ ]: Varianzen nicht-überlappender  $q$ -Tagesänderungen



**Abbildung A.22:** RMJBN Modell Version 2 [Geo(p),  $p = 5\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

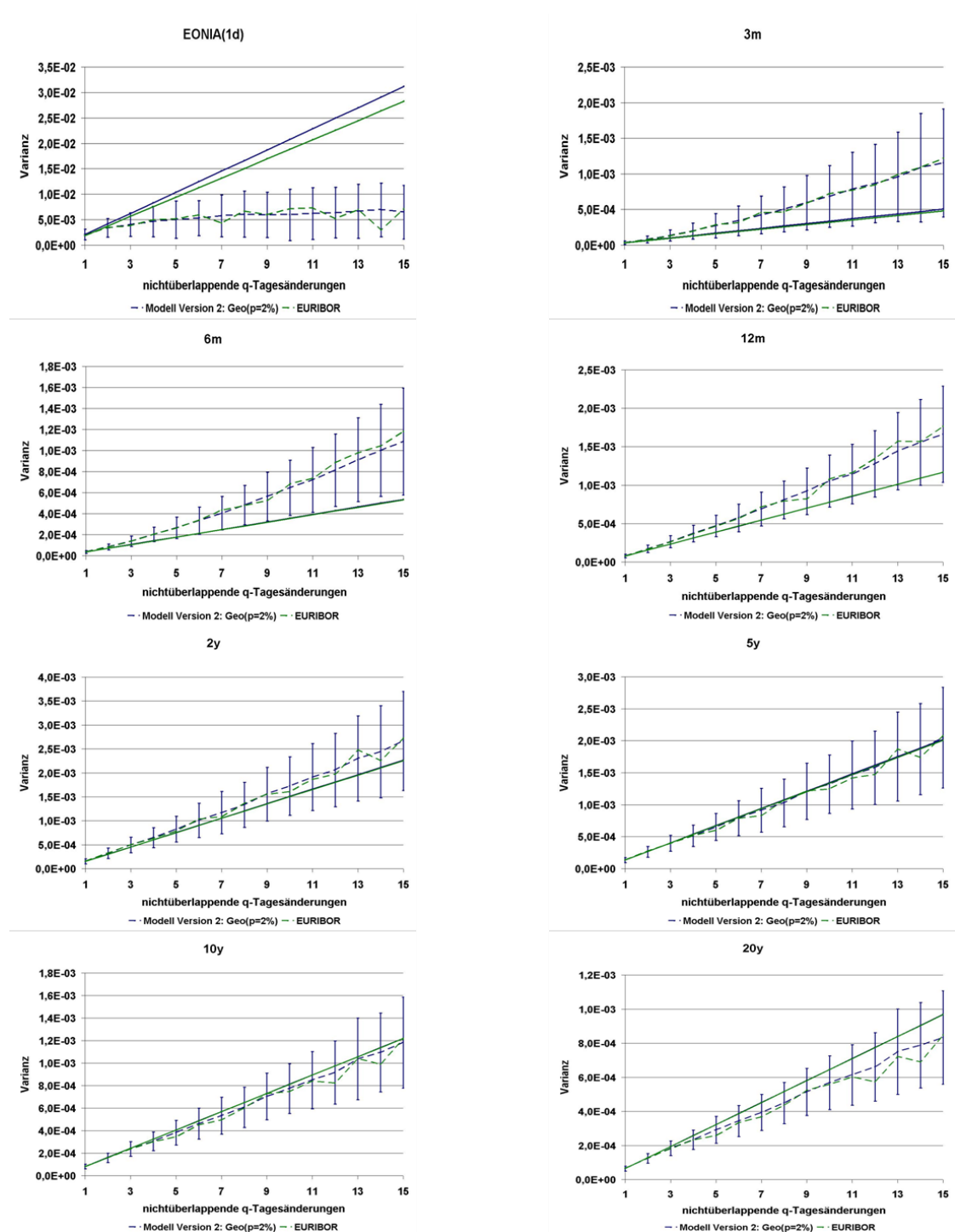
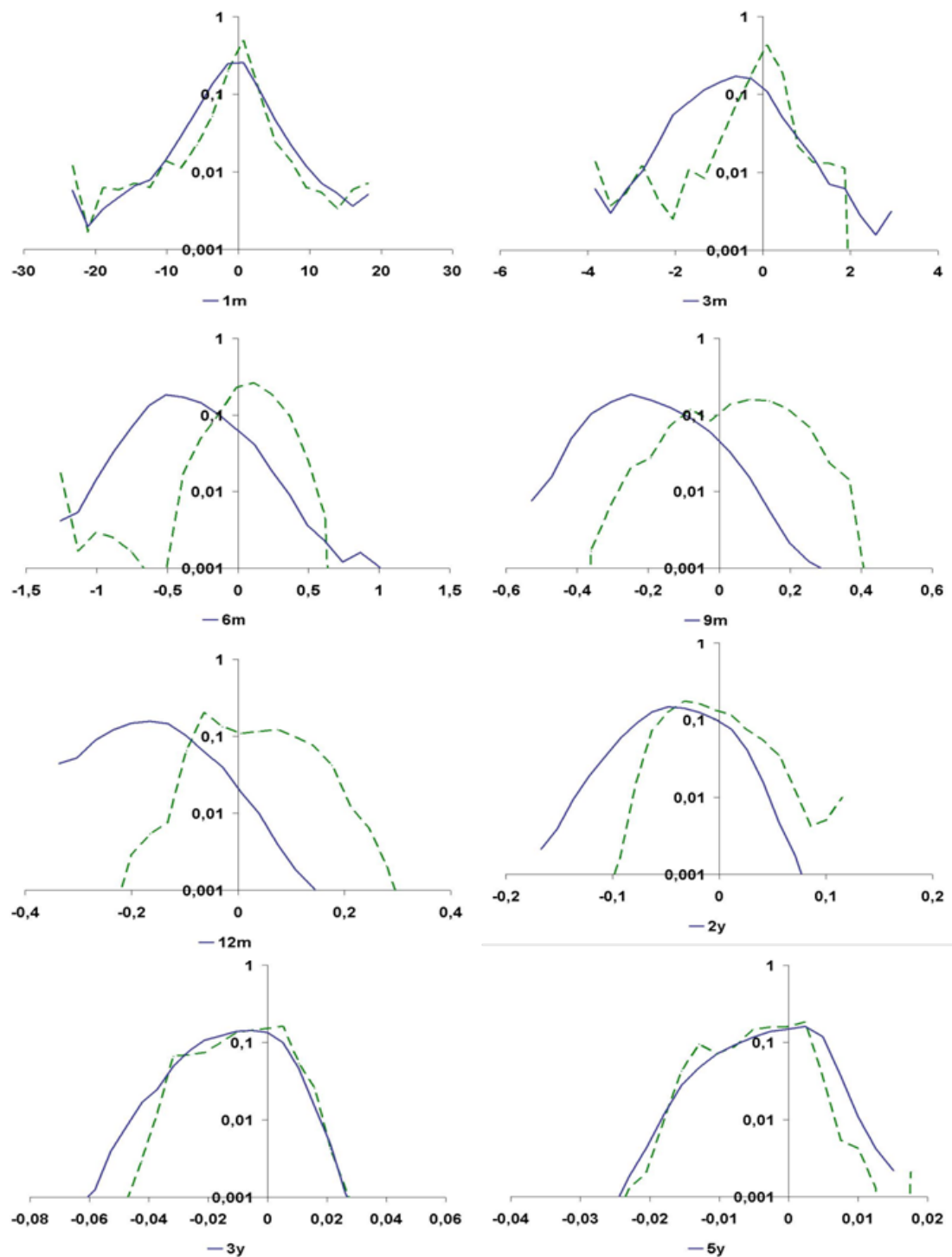


Abbildung A.23: RMJBN Modell Version 2 [ $\text{Geo}(p), p = 2\%$ ]: Varianzen nicht-überlappender  $q$ -Tagesänderungen



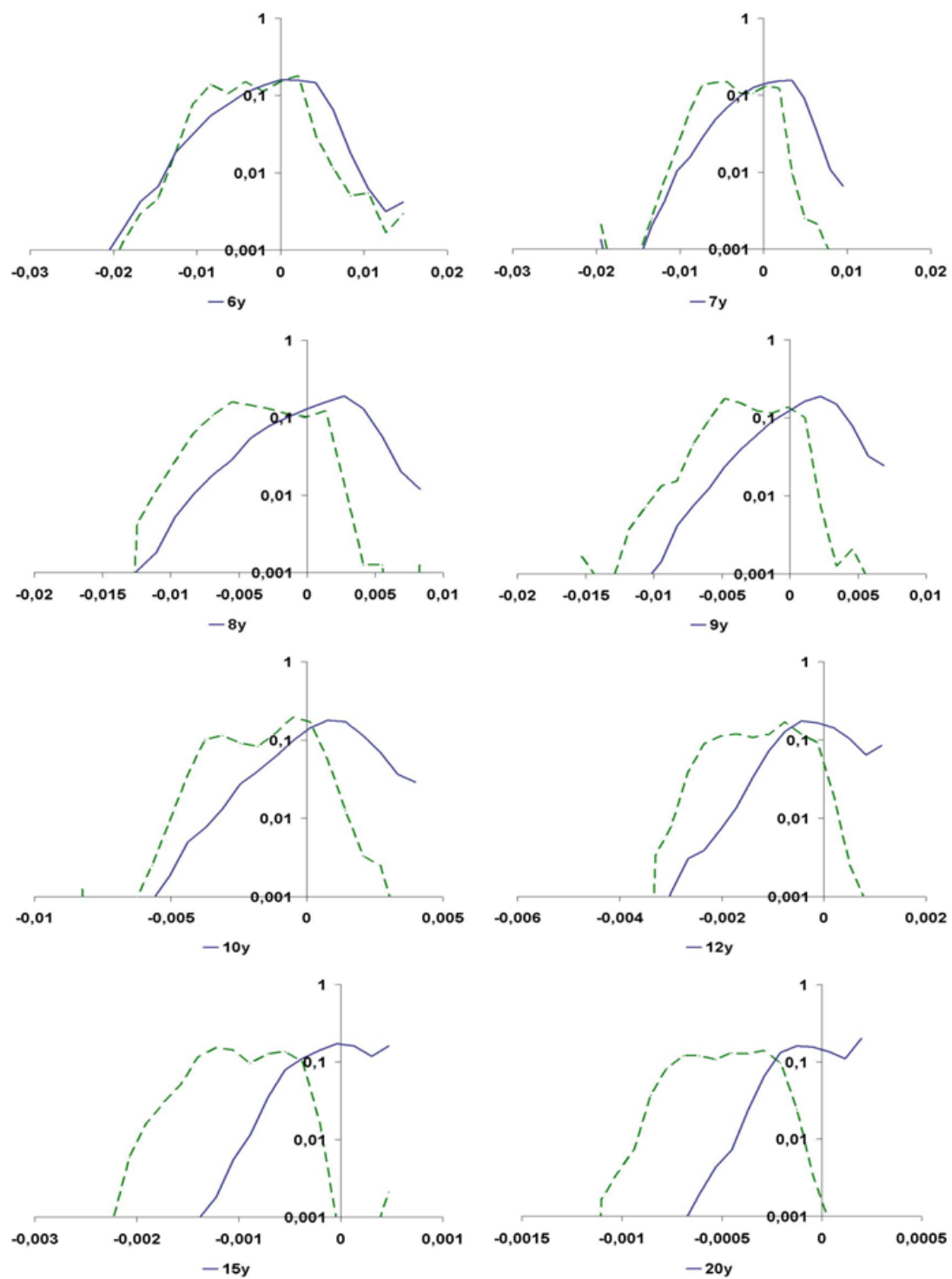
**Abbildung A.24:** RMJBN Modell Version 2 [Geo(p),  $p = 2\%$ ]: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

## A.6.3 Modell Version 3



**Abbildung A.25:** RMJBN Modell Version 3: Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen 1m-5y. Die logarithmierten relativen Häufigkeiten werden auf der y-Achse dargestellt





**Abbildung A.26:** RMJBN Modell Version 3: Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen 6y-20y

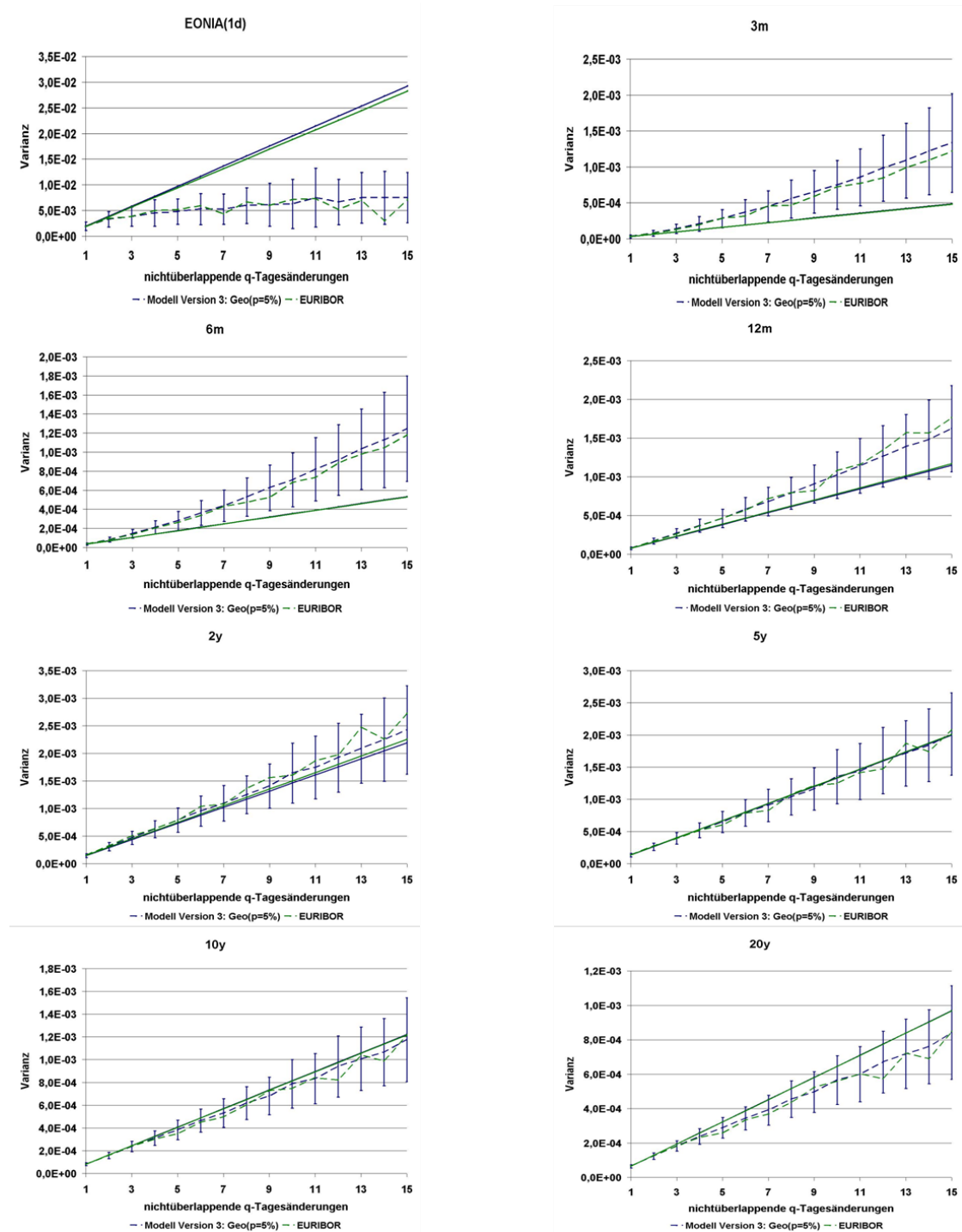


Abbildung A.27: RMJBN Modell Version 3: Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

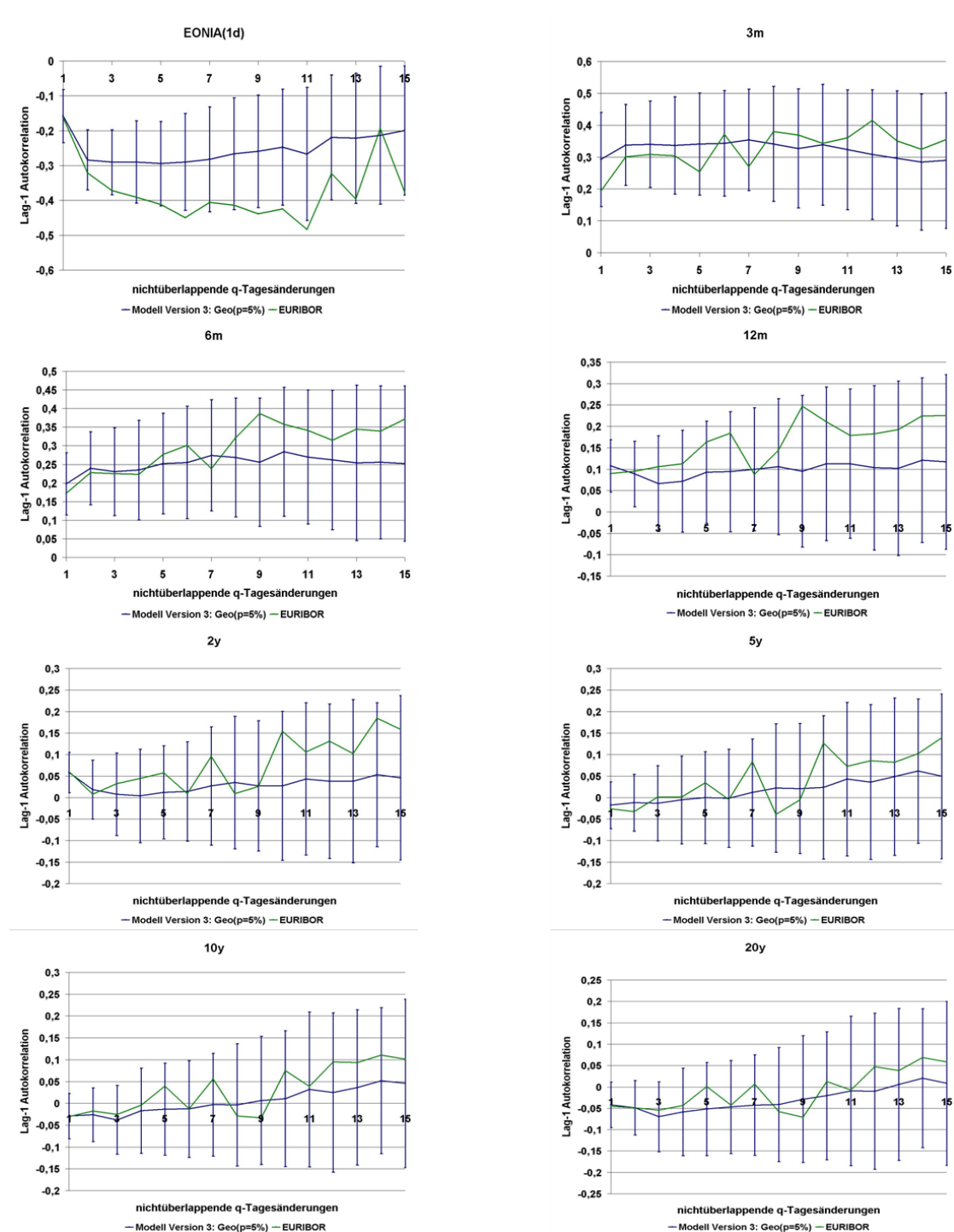


Abbildung A.28: RMJBN Modell Version 3: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen

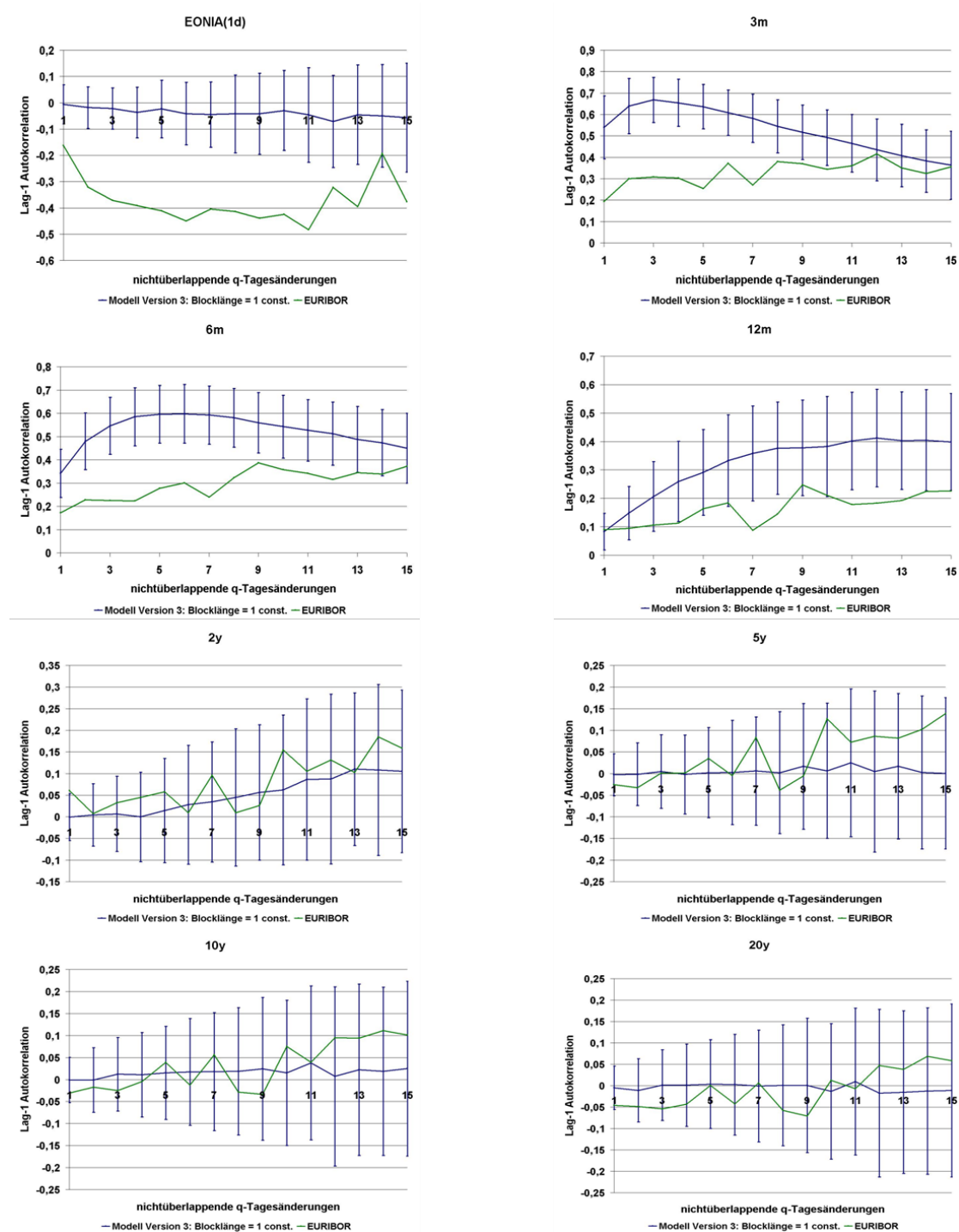


Abbildung A.29: RMJBN Modell Version 3: Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen mit konstanter Blocklänge=1

## A.6.4 Extended RMJBN Modell

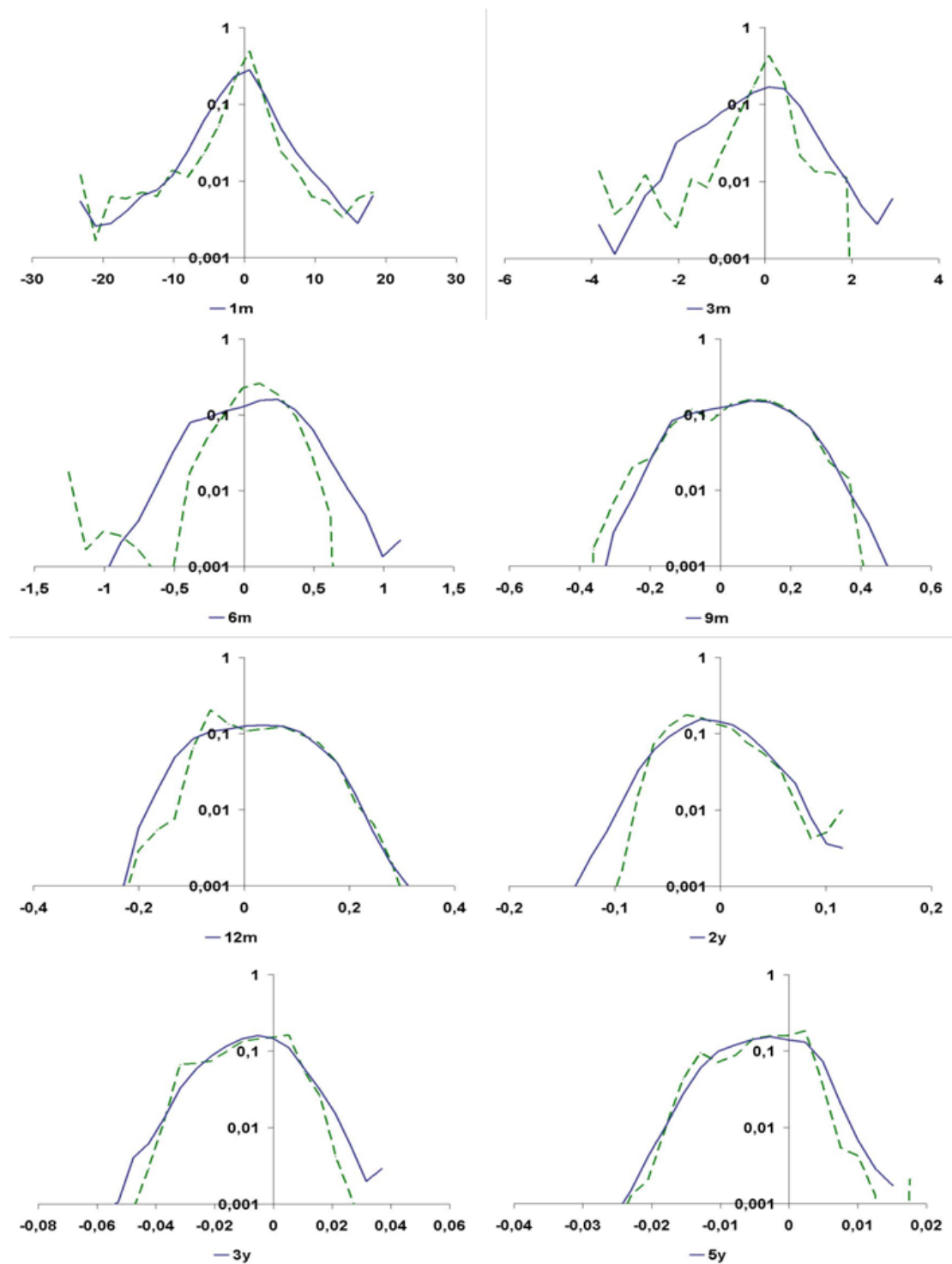
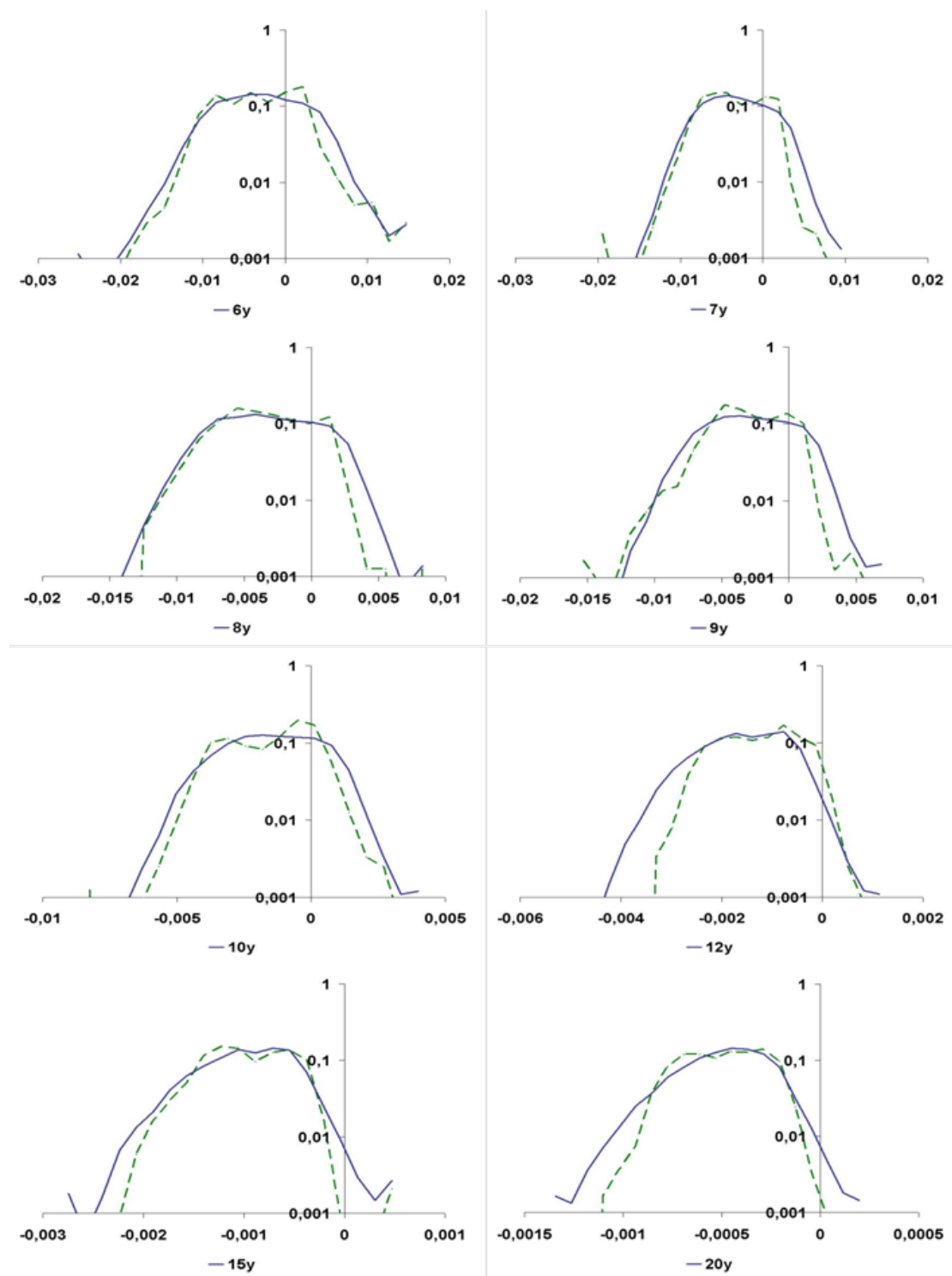


Abbildung A.30: Extended RMJBN Modell: Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen 1m-5y



**Abbildung A.31:** Extended RMJBN Modell: Verteilungen der Zinskurven-Krümmungen 6y-20y

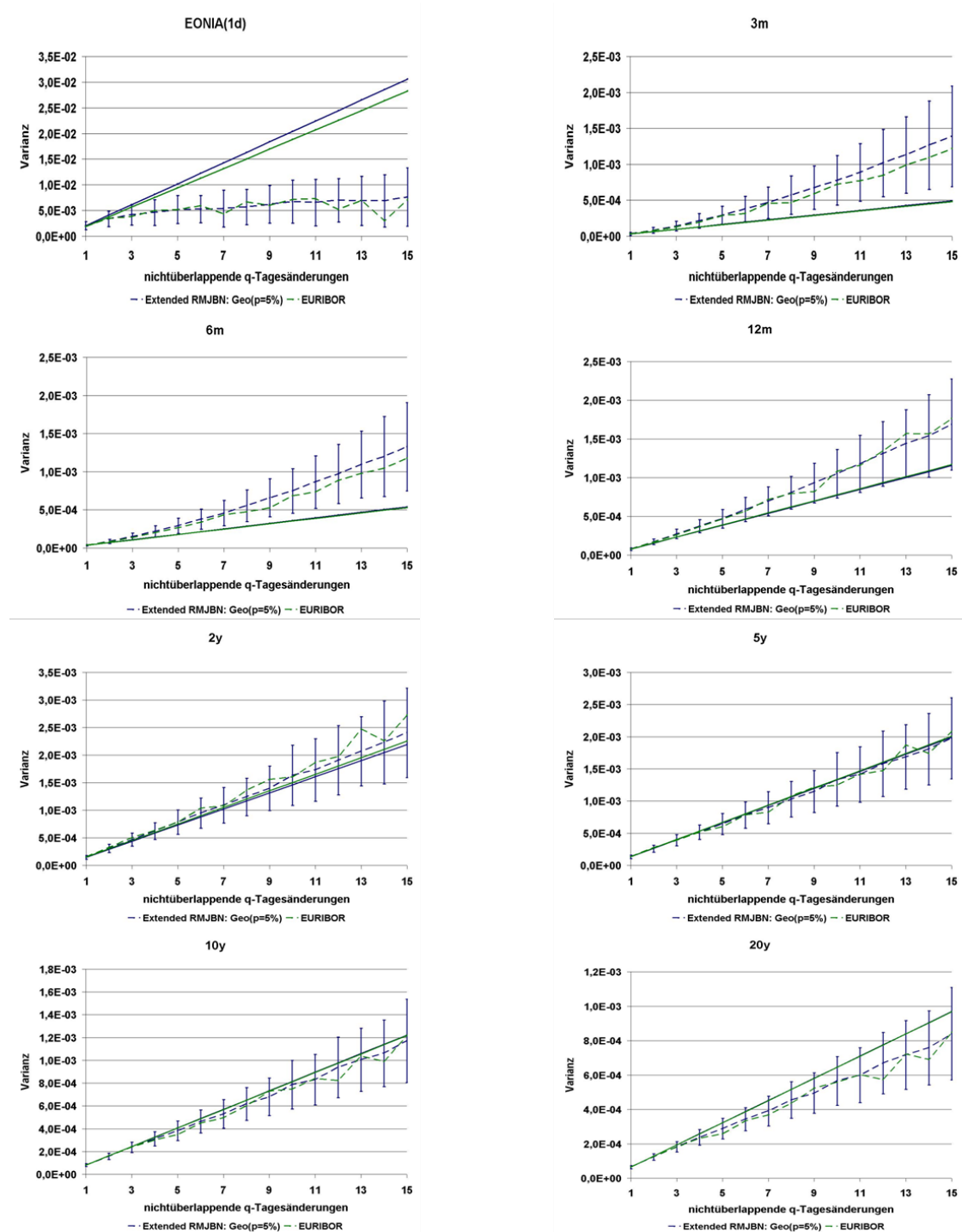
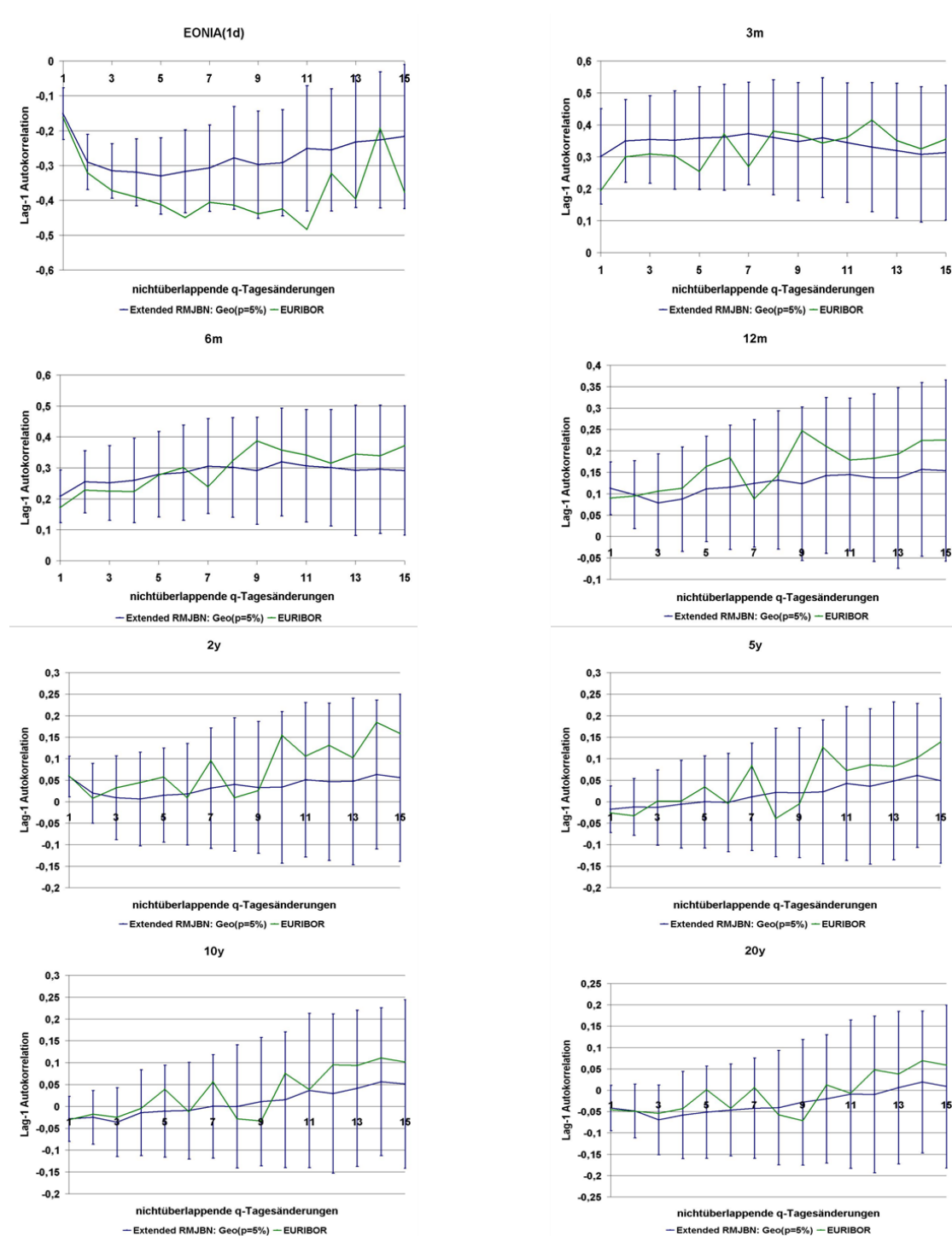


Abbildung A.32: Extended RMJBN Modell ( $p=5\%$ ): Varianzen nichtüberlappender q-Tagesänderungen



**Abbildung A.33:** Extended RMJBN Modell ( $p=5\%$ ): Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappender q-Tagesänderungen



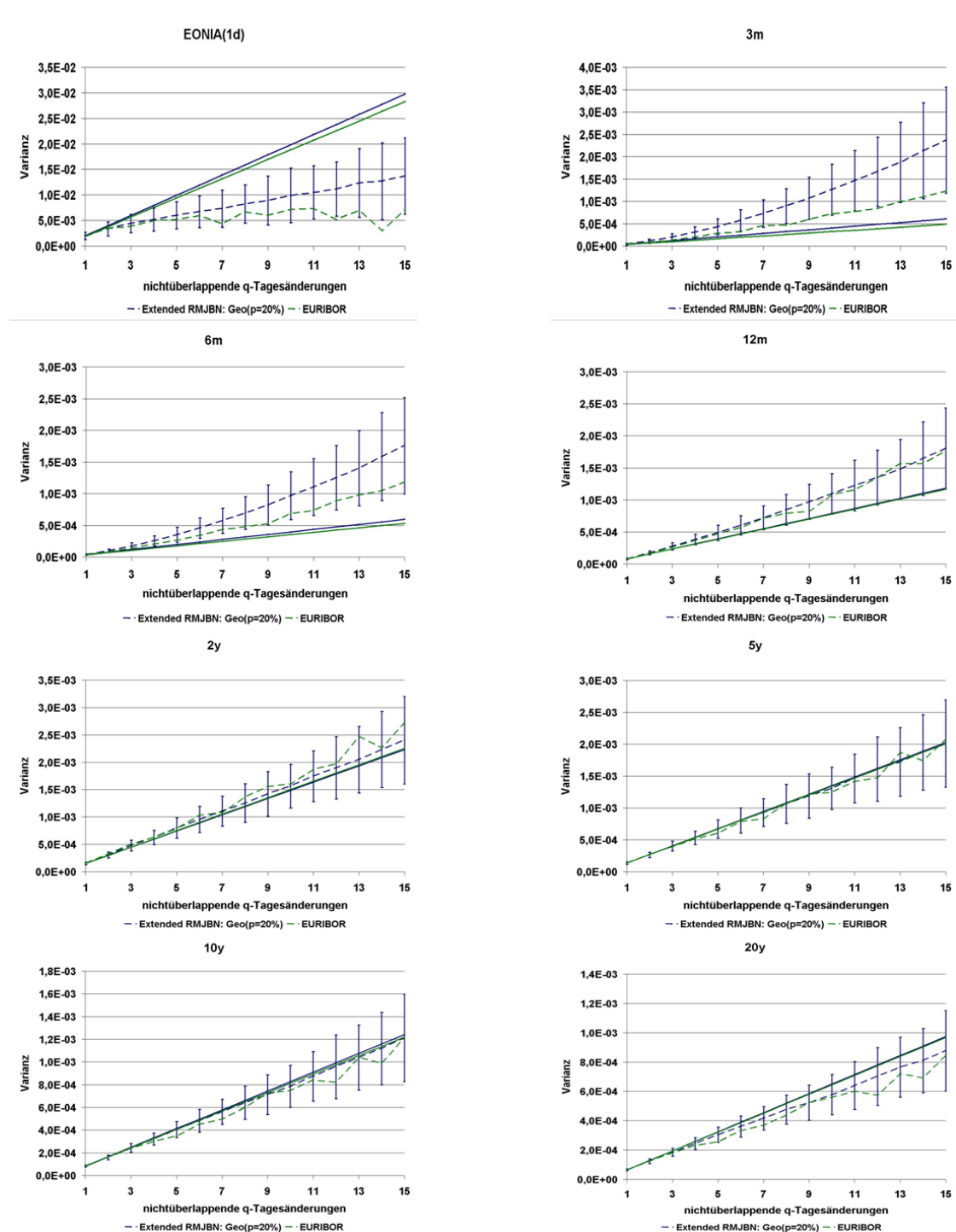


Abbildung A.34: Extended RMJBN Modell ( $p=20\%$ ): Varianzen nichtüberlappender  $q$ -Tagesänderungen

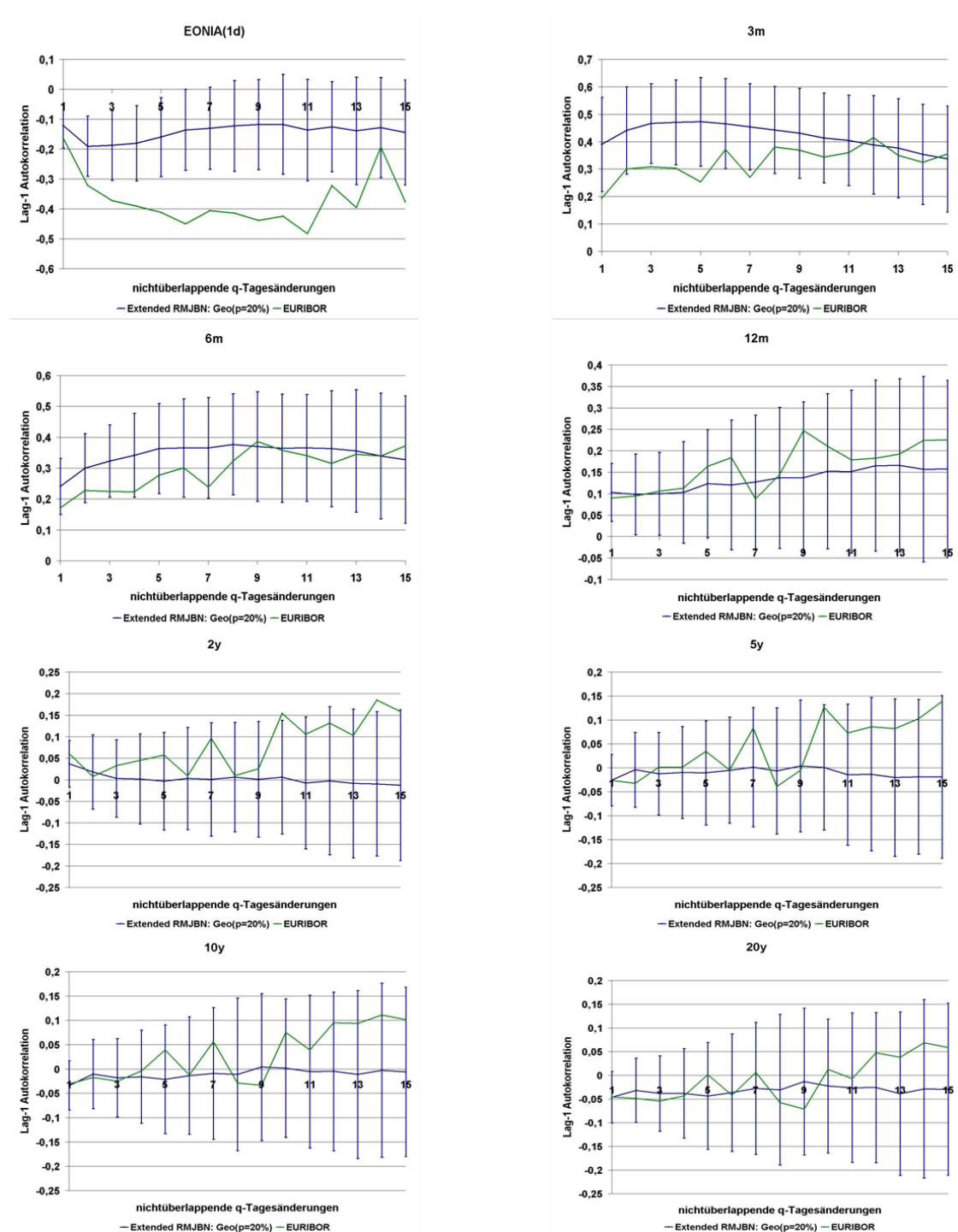


Abbildung A.35: Extended RMJBN Modell ( $p=20\%$ ): Lag-1 Autokorrelationen nichtüberlappenden q-Tagesänderungen

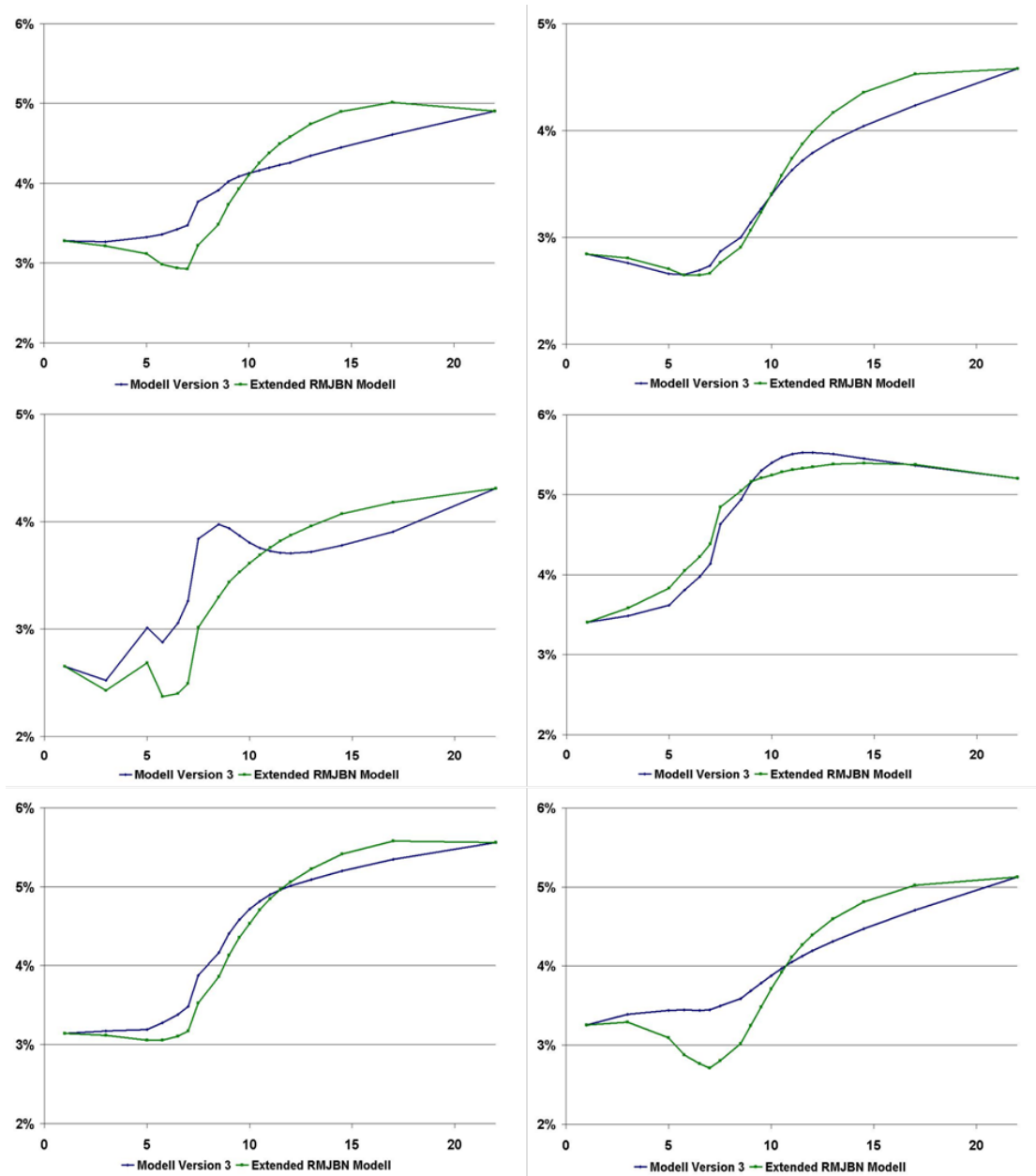


Abbildung A.36: Zinskurven: Extended RMJBN Modell (grün) vs. Modell Version 3 (blau)

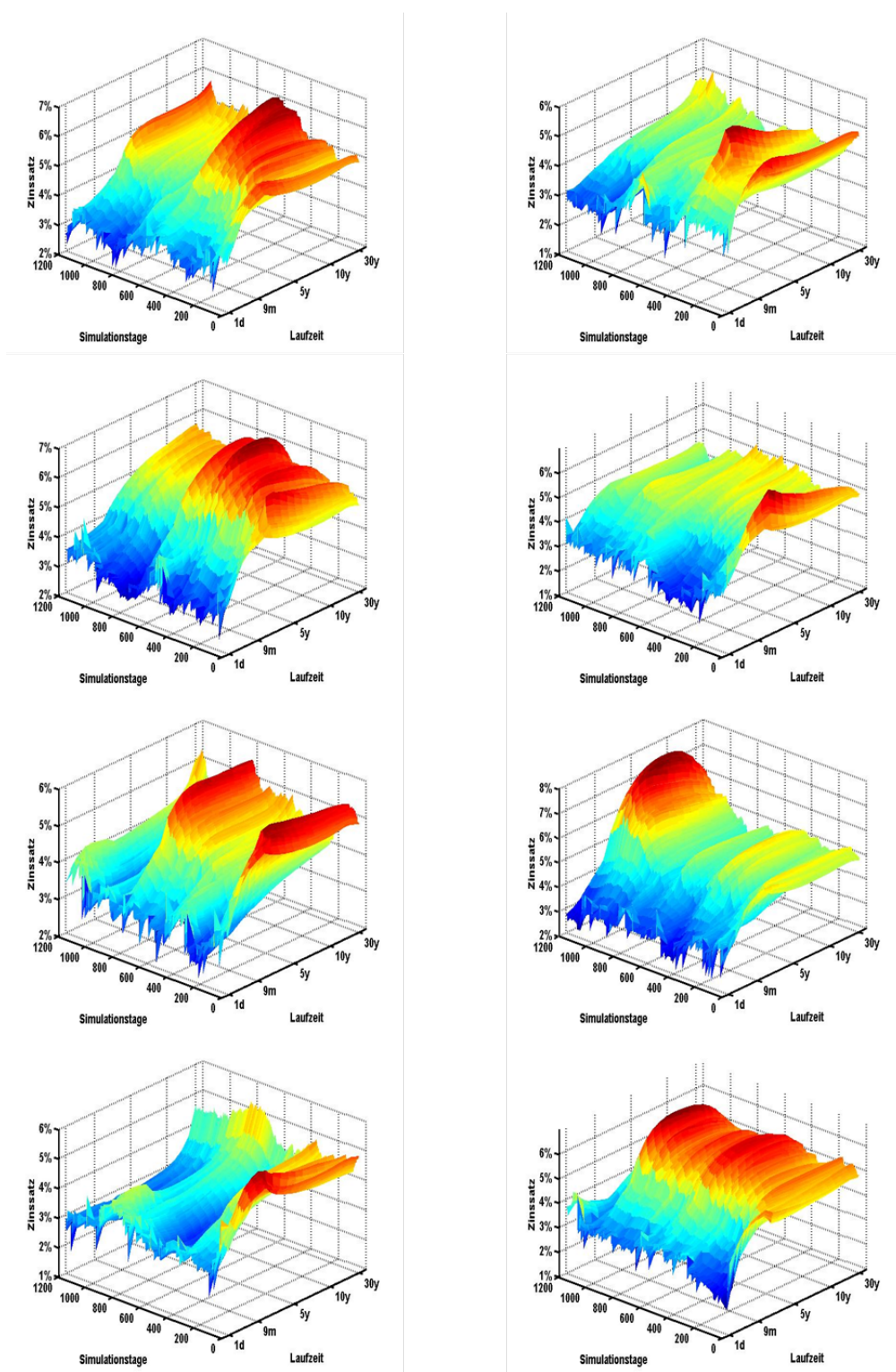


Abbildung A.37: Zinsflächen: Modell Version 3

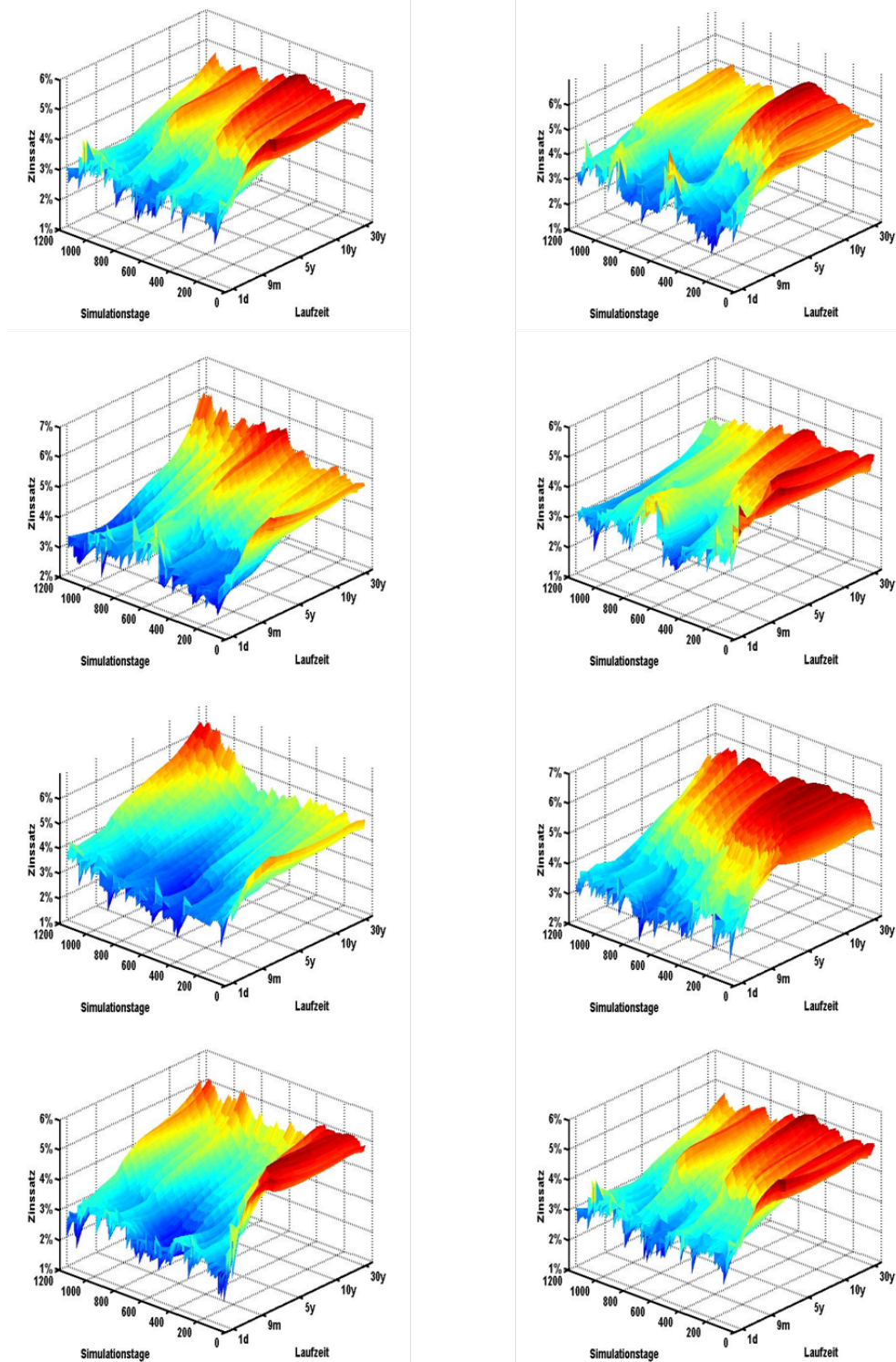


Abbildung A.38: Zinsflächen: Extended RMJBN Modell

